ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ
Нелинейные динамические системы

Вып. 43 Межвузовский сборник научных трудов **2011**

УДК 534:519.2

И. Е. Полосков
г.Пермь

РАСЧЕТ ПОВЕДЕНИЯ ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА ПРИ ДВИЖЕНИИ С ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТЬЮ ПО ДОРОГЕ СО СЛУЧАЙНЫМ МИКРОПРОФИЛЕМ И С УЧЕТОМ ЗАПАЗДЫВАНИЯ

Моделируется движение автомобиля по неровной дороге, представляемой случайным процессом с заданными характеоистиками. На основе специальной схемы, сочетающей метод шагов и расширение фазового пространства, проведены численные расчеты построенной цепочки обыкновенных дифференциальных уравнений без запаздывания для первых моментов вертикального перемещения и угла галопирования автомобиля при различных значениях параметров модели.

Введение

Как известно, в связи с запросами практики неослабевающий интерес проявляется к изучению динамики транспортных средств (ТС) [1–4], в т.ч. двигающихся по неровной поверхности. Такое движение, как правило, сопровождается непрерывными колебаниями его подрессоренных и неподрессоренных частей, которые оказывают вредное влияние на водителя, пассажиров и перевозимые грузы, ухудшают условия работы агрегатов и узлов, вынуждают уменьшать скорость движения [5].

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект N 11-01-96024).

Наряду с учетом нерегулярности дорожного полотна уже давно признано необходимым принимать во внимание и запаздывание воздействия от случайного профиля на задние колеса ТС.

Ранее в работах [6, 7] на основе [8] нами разрабатывались и использовались схемы изучения поведения автомобиля при движении с постоянной скоростью по дороге со случайным микропрофилем с учетом наличия расстояния между осями передних и задних колес. При этом в качестве модели была выбрана система линейных стохастических дифференциальных уравнений (СДУ, ЛСДУ) с постоянным запаздыванием.

В настоящей работе для расчета колебаний корпуса ТС при движении с переменной скоростью применяется схема, основанная на представлении указанной скорости кусочно-постоянной функцией и использовании модели в виде ЛСДУ с кусочно-постоянными запаздываниями [9].

1. Модель транспортного средства

Рассмотрим движение ТС в вертикальной плоскости. Схема этого ТС (см. рис.1) состоит из движущейся массы m, подвешенной на двух колесах, и моделируется системой с двумя степенями свободы. Предполагается, что в процессе движения подвеска остается вертикальной.

Обозначим через $Y(t)$ смещение центра масс из положения статического равновесия (соответствующего Y_0), а через $\Theta(t)$ – угол наклона корпуса ТС (t – время). Пусть $q = q(s)$ – функция, характеризующая профиль дороги ($s = r(t)$ – пройденный путь, монотонно возрастающая функция времени: $\dot{s} = v(t) > 0$), G – центр масс, k_i и c_i – коэффициенты жесткости и демпфирования ($i = 1, 2$). Тогда уравнения движения будут иметь вид [10]

$$\begin{aligned} &m\ddot{Y} + c_1\dot{Z}_1 + c_2\dot{Z}_2 + k_1 Z_1 + k_2 Z_2 = mg, \\ &I\ddot{\Theta} + c_1 l_1 \dot{Z}_1 - c_2 l_2 \dot{Z}_2 + k_1 l_1 Z_1 - k_2 l_2 Z_2 = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где I – момент инерции ТС относительно центра масс, g – ускорение свободного падения, а точками обозначены производные по времени. Эти уравнения можно записать в следующей матрично-векторной форме:

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \mathsf{P}\,\boldsymbol{X}(t) + \mathsf{Q}\boldsymbol{X}(t-\tau) + \mathsf{R}\,\dot{\boldsymbol{W}}(t), \qquad t > 0, \tag{2}$$

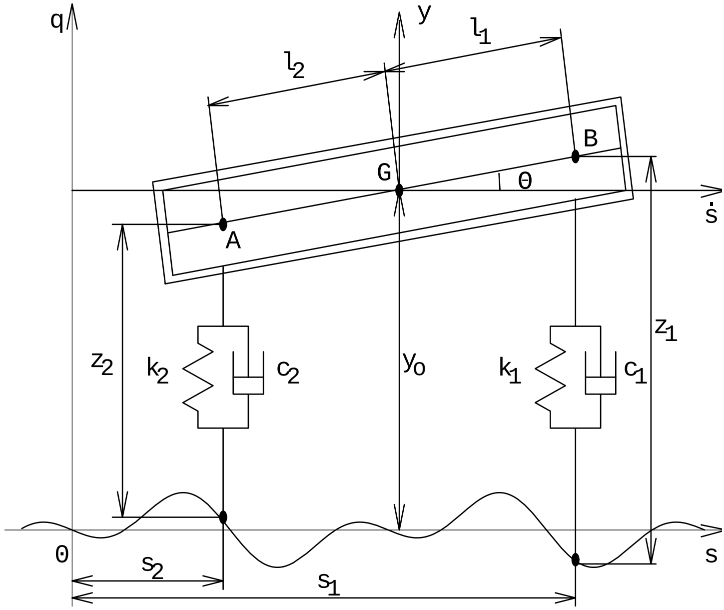

Рис.1

где $\tau = l/v(t)$, $v(t)$ – скорость движения автомобиля,

$$\mathsf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & k_{11} & c_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & k_{21} & c_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varkappa(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\varkappa(t)\,\omega^2 & -2\,\varkappa(t)\,\alpha \end{bmatrix},$$

$$\mathsf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{12} & c_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{22} & c_{22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathsf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ g_0\sqrt{\varkappa(t)} \end{bmatrix},$$

$$p_{21} = -(k_{11} + k_{12}), \qquad p_{22} = -(c_{11} + c_{12}),$$

$$p_{23} = -(k_{11}\, l_1 - k_{12}\, l_2), \qquad p_{24} = -(c_{11}\, l_1 - c_{12}\, l_2),$$
$$p_{41} = -(k_{21} + k_{22}), \qquad p_{42} = -(c_{21} + c_{22}),$$
$$p_{43} = -(k_{21}\, l_1 - k_{22}\, l_2), \qquad p_{44} = -(c_{21}\, l_1 - c_{22}\, l_2),$$
$$c_{11} = \frac{c_1}{m}, \qquad c_{12} = \frac{c_2}{m}, \qquad k_{11} = \frac{k_1}{m}, \qquad k_{12} = \frac{k_2}{m},$$
$$c_{21} = \frac{c_1 l_1}{I}, \qquad c_{22} = -\frac{c_2 l_2}{I}, \qquad k_{21} = \frac{k_1 l_1}{I}, \qquad k_{22} = -\frac{k_2 l_2}{I},$$
$$l = l_1 + l_2, \qquad t = \psi(s), \qquad \varphi(t) = \psi'(s)|_{s=r(t)} = \frac{1}{\varkappa(t)},$$

а последние два уравнения системы (2) представляют собой формирующий фильтр для дорожного воздействия с ковариационной функцией [11]:

$$K_q(s) = \sigma_0^2 e^{-\alpha|s|}\big(\cos\omega_0 s + \frac{\alpha}{\omega_0}\sin\omega_0|s|\big), \qquad \omega^2 = \omega_0^2 + \alpha^2,$$

где $\sigma_0 = \mathrm{const}$ – стандарт микропрофиля дороги, ω_0 и α – положительные постоянные.

Задача исследования состоит в вычислении компонент вектора математических ожиданий $\boldsymbol{m}(t) = \{m_i(t)\} \equiv \mathbf{M}\big[\boldsymbol{X}(t)\big]$ и элементов ковариационной матрицы $D(t) = \{D_{ij}(t)\} \equiv \mathbf{M}\big[\{\boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{m}(t)\}\{\boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{m}(t)\}^T\big]$ фазового вектора $\boldsymbol{X}(t)$ ($D_i(t) \equiv D_{ii}(t)$, где $\mathbf{M}$ и T – символы оператора нахождения математического ожидания и транспонирования соответственно. При этом предполагается, что выходные переменные фильтра ($X_5(t)$ и $X_6(t)$) находятся в стационарном состоянии и имеют совместное нормальное распределение с параметрами

$$\mathbf{M}\big[X_5(t)\big] = \mathbf{M}\big[X_6(t)\big] = 0,$$
$$\mathbf{M}\big[X_5^2(t)\big] = \sigma_0^2, \qquad \mathbf{M}\big[X_5(t)x_6(t)\big] = 0, \qquad \mathbf{M}\big[X_6^2(t)\big] = \omega^2\sigma_0^2.$$

2. Метод исследования

Как известно, универсальной приближенной схемой, позволяющей исследовать СДУ с запаздыванием всех классов, является метод Монте-Карло (статистического моделирования) [12–15]. Но различные алгоритмы, предназначенные для численного интегрирования даже простейших стохастических дифференциально-разностных уравнений, как правило, весьма сложны [16, 17] и предназначены только для решения достаточно узких классов задач.

С другой стороны, можно отметить авторскую методику исследования стохастических систем с различными формами запаздывания (постоянными, кратными, переменными, кусочно-постоянными, для уравнений нейтрального типа), основанную на классическом методе шагов и расширении фазового пространства и предложенную ранее для полного исследования подобных систем на основе построения цепочки уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова для последовательности фазовых векторов увеличивающейся размерности. В частности, для анализа движения автомобиля с переменной скоростью можно воспользоваться схемой, изложенной в работе [9] и основанной на представлении переменного запаздывания кусочно-постоянной функцией и построении обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для первых моментов (математических ожиданий и ковариаций) фазового вектора.

Основные части этой схемы таковы:

1. Определение цепочки фазовых векторов увеличивающейся размерности.

2. Построение соответствующей цепочки СДУ без запаздывания.

3. Вывод ОДУ для первых моментов.

4. Численное интегрирование этих уравнений.

3. Результаты расчетов

В качестве модели изменения скорости использовалось соотношение с постоянным положительным ускорением $a = \mathrm{const} \equiv a_0$. В этом случае скорость движения $v(t)$ выразится формулой $v(t) = a_0 \cdot t + v_0$ ($v_0 = \mathrm{const}$, $t \geq 0$), причем ($s_0 = \mathrm{const}$)

$$s = r(t) = \frac{a_0}{2}\, t^2 + v_0\, t + s_0,$$

$$t = \psi(s) = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2\, a_0\, (s - s_0)}}{a_0},$$

$$\psi'(s) = \frac{1}{\sqrt{v_0^2 + 2\, a_0\, (s - s_0)}} = \frac{1}{\varkappa(t)} = \varphi(t),$$

$$\varkappa(t) = \sqrt{a_0^2\, t^2 + 2\, a_0\, v_0\, t + v_0^2}.$$

Ниже представлены результаты расчетов, выполненные с помощью программы на входном языке пакета `Mathematica` [22], для двух случаев: 1) разгон автомобиля от 0 до 10 м/с (рис.2–5); 2) то же, но для изменения скорости от 10 до 20 м/с (рис.6–9).

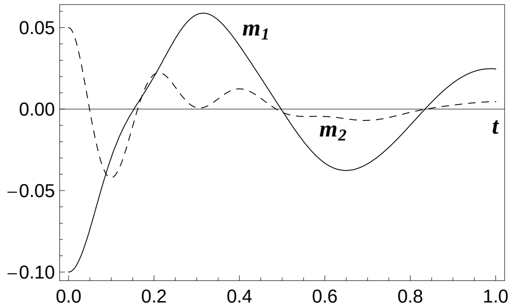

Рис.2

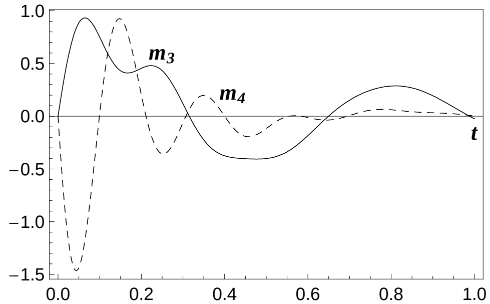

Рис.3

Таблица 1

N	Тип дороги	$\sigma_0^2 \cdot 10^{-4}$ (м^2)	α	β
1	Грунтовая	2,3	0,0148	0,03342
2	Асфальтовое шоссе	1,0	0,0500	0,60000
3	Булыжное шоссе	3,2	0,3000	1,00000

Параметры дорожного микропрофиля выбирались из табл.1 [18], а ТС – из табл.2 [10, 19–21]. В частности, приведенные графики соответствуют дороге и автомобилю третьих типов.

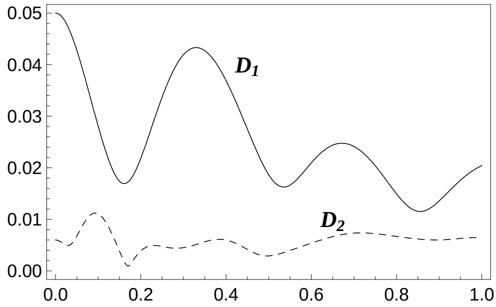

Рис.4

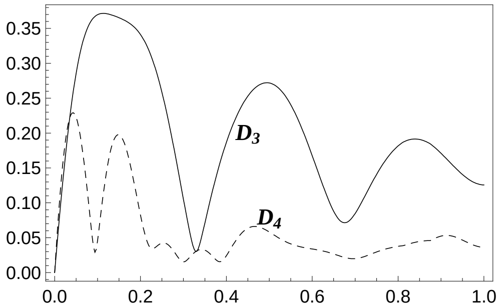

Рис.5

Таблица 2

N	m	c_1	c_2	k_1	k_2	I	l_1	l_2
1	17800	80000	80000	$4{,}00 \cdot 10^6$	$4{,}00 \cdot 10^6$	930,0	2,000	2,000
2	13200	16000	18000	$4{,}65 \cdot 10^5$	$5{,}24 \cdot 10^5$	3000,0	2,340	2,885
3	8444	9080	9080	$2{,}72 \cdot 10^5$	$8{,}53 \cdot 10^5$	12446,2	2,590	3,290

Примечание. Размерности величин в колонках (начиная со второй): [кг], [н·с/м], [н·с/м], [н/м], [н/м], [кг·м^2], [м], [м].

При проведении расчетов промежутки изменения скоростей разбивались на 16 частей, что приводило к необходимости генерирования и последующего численного интегрирования (с автоматиче-

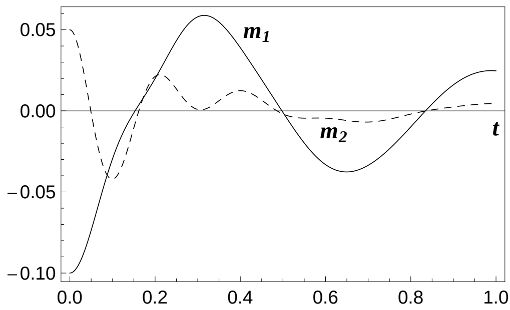

Рис.6

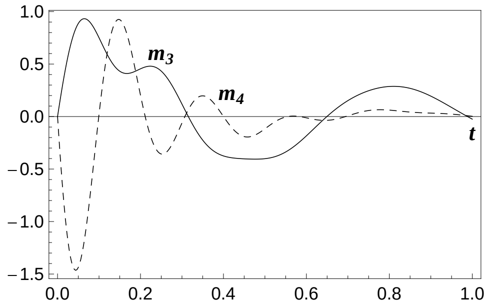

Рис.7

ским выбором шага) на последнем этапе 114 ОДУ для математических ожиданий и 12996 ОДУ для элементов ковариационной матрицы.

Даже при беглом анализе приведенных графиков несложно увидеть, что поведение математических ожиданий для первого и второго случаев если и отличается, то незначительно. А вот соответствующие диагональные элементы ковариационных матриц демонстрируют существенное расхождение.

Заключение

В процессе анализа приведенного графического материала несложно увидеть реальное влияние и необходимость учета запаздывания при изучении движения ТС по дороге со случайным микро-

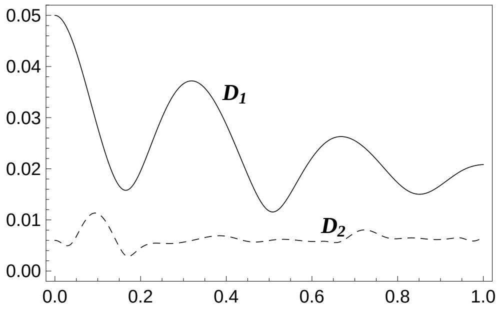

Рис.8

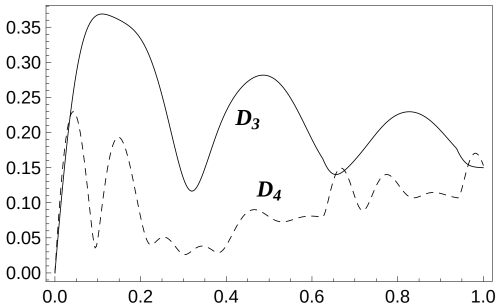

Рис.9

профилем. Более того, использовавшаяся методика позволяет исследовать не только "регулярные", но и "редкие" (ухабы и рытвины) неровности. Последние могут быть учтены путем добавления в правые части уравнений движения слагаемых, представляющих собой случайные скачкообразные процессы пуассоновского типа.

Библиографический список

1. *Andrzejewcki R., Awrejcewicz J.* Nonliner dynamics of a wheeled vehicle. Springer Science+Business Media, Inc., 2005. 326 p.

2. *Graziani F.* (ed.) Computational methods in transport: verifica-

tion and validation. Berlin: Springer, 2008. 340 p.

3. *Rajamani R.* Vehicle dinamics and control. Springer, 2006. 485 p.

4. *Schiehlen W.O.* Dynamical analysis of vehicle systems: Theoretical foundations and advanced applications. Wien, New York: Springer, 2007. 309 p.

5. *Яценко Н.Н., Прутчиков О.К.* Плавность хода грузового автомобиля. М.: Машиностроение, 1968. 220 с.

6. *Полосков И.Е.* Движение транспортного средства по дороге со случайным профилем с учетом запаздывания // Мат. моделирование. 2005. Т.17, № 3. С.3–14.

7. *Полосков И.Е.* Применение метода Монте-Карло для анализа движения транспортного средства по дороге со случайным микропрофилем и с учетом запаздывания // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. ун-т. Пермь, 2010. Вып.42. С.88–99.

8. *Полосков И.Е.* Расширение фазового пространства в задачах анализа дифференциально-разностных систем со случайным входом // Автоматика и телемеханика. 2002. № 9. С.58–73.

9. *Полосков И.Е.* К анализу линейных стохастических систем с кусочно-постоянными запаздываниями // Вестн. Пермс. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2011. Вып.2 (5). С.76–83.

10. *Di Paola M., Pirotta A.* Vehicle dynamic response considering front-to-rear excitation delay // 8th ASCE Specialty Conf. on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability. PMC2000-255. 6 p. URL: `htpp://www.usc.edu/dept/civil_eng/johnsone/pmc2000/sessions/papers/p255.pdf` (дата обращения: 01.06.2003).

11. *Болотин В.В.* Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 336 с.

12. *Kalos M.H., Whitlock P.A.* Monte Carlo methods. Weinheim: Wiley-VCH Verlag, 2004. 195 p.

13. *Мильштейн Г.Н.* Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. Свердловск: Изд-во Урал. ун-та, 1988. 224 с.

14. *Кузнецов Д.Ф.* Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. 3-е изд., испр. и доп. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2009. 800 с.

15. *Kloeden P.E., Platen E.* Numerical solution of stochastic differential equations. Berlin: Springer-Verlag, 1999. 636 p.

16. *Kushner H.J.* Numerical methods for controlled stochastic delay systems. Boston: Birkhäuser, 2008. 295 p.

17. *Baker C.T.H., Buchwar E.* Introduction to the numerical analysis of stochastic delay differential equations // Numerical analysis report №345 (revised). Manchester: Univ. of Manchester, 2000. 25 p.

18. *Виноградова Э.В., Шепелев Г.В.* К вопросу о дифференцироруемости воздействий при вероятностном анализе колебаний механических систем // Динамика и прочность конструкций: Тематич. сб-к науч. тр. Челябинск: ЧПИ, 1975. № 159. С.33–40.

19. *Chen C., Tomizuka M.* Lateral control of commercial heavy vehicles // Vehicle System Dynamics. 2000. Vol.33, № 6. P.391–420.

20. *Гусев А.С., Светлицкий В.А.* Расчет конструкций при случайных воздействиях. М.: Машиностроение, 1984. 240 с.

21. *Tamboli J.A., Joshi S.G.* Optimum design of a passive suspension system of a vehicle subjected to actual random road exicitations // Journal of Sound and Vibration. 1999. V.219. № 2. P.193–205.

22. *Wolfram S.* The Mathematica Book. 5th ed. Champaign, Il: Wolfram Media, 2003. 1488 p.