

УДК 531.31+62-50

М.Х. Тешаев

*Бухарский технологический институт пищевой
и легкой промышленности*

Республика Узбекистан, 705017, Бухара,
ул. К. Муртазаева, д. 15
muhsin_5@mail.ru; +99865-223-61-97

ОСУЩЕСТВЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СЕРВОСВЯЗЕЙ ИСПОЛНИТЕЛЬНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ "АСИНХРОННЫЙ ДВИГАТЕЛЬ"

Рассматривается проблема осуществления геометрических сервосвязей электромеханическими силами с учетом параметрического освобождения системы от сервосвязей. Для этого предлагается составлять цифровую следящую систему (ЦСС), за исполнительный элемент которой принимается асинхронный двигатель (АД). Составляется полная система уравнений ЦСС, и определяются для стационарных режимов законы формирования управляющих воздействий, а для переходного процесса – уравнения на конечных разностях. Для классической задачи Бегена с пластинкой и диском получены численные результаты.

Ключевые слова: геометрические сервосвязи; цифровая следящая система, асинхронный двигатель.

Рассмотрим проблему осуществления сервосвязей вида

$$\Phi_{\alpha}(t, q_1, \dots, q_n) = 0, \quad (\alpha = 1, \dots, a) \quad (1)$$

электромеханическими силами.

Имея ввиду параметрическое освобождение системы от сервосвязей [3, 4], введем дополнительные независимые вели-

чины η_p , соответствующие преобразованию системы с сервосвязями (1) к виду

$$\Phi_{\alpha}^*(t, q_1, \dots, q_n, \eta_1, \dots, \eta_a) = 0, \quad (\alpha=1, \dots, a), \quad (2)$$

где η_1, \dots, η_a – параметры, характеризующие освобождение системы от сервосвязей (1). Нулевые значения параметров η_p и их производных $\dot{\eta}_p$ соответствуют связям (1) и их продифференцированным формам. За эти величины могут быть взяты, например, левые части уравнений (1), вычисляемые на действительном движении системы [5, 6].

Из работ В.В.Румянцева [6, 7], а также А.Г.Азизова [9, 10] известно, что примером систем, содержащих сервосвязи, являются следящие системы. Поэтому, для решения поставленного вопроса нами предлагается пользоваться электромеханической цифровой следящей системой (ЦСС) [14].

На основе анализа требований, предъявляемых к динамической точности ЦСС и учета загруженности ЦВМ, могут быть построены ЦСС автономного или неавтономного типа. Под автономной понимают следящую систему, в которой ЦВМ служит лишь в качестве задающего устройства. Если сравнение задаваемого и обрабатываемого сигналов происходит в самой ЦВМ, то такая система называется неавтономной. В остальном обе схемы идентичны: сигнал с ЦВМ либо ДВУ (дополнительное вычислительное устройство) поступает на преобразователь кода в напряжение (ПКН), проходит усилитель – преобразователь (УП) и подается на электрическую машину (ЭМ), которая, действуя на объект управления (ОУ), изменяет ее кинематические характеристики. С помощью схемы преобразования (СП) с датчиков измерения (ДИ) снимается сигнал и передается на ЦВМ, либо ДВУ.

В настоящее время в электроприводе промышленных роботов нашли наибольшее применение ЭМ постоянного тока. Это обусловлено удобством и простотой регулирования скорости и момента. Находят применение как ЭМ общего назначения, так и специальные: высокомоментные (с повышенной перегрузочной способностью) и малоинерционные (с минимальным моментом инерции) [15].

Для питания ЭМ постоянного тока, используемых в промышленных роботах и других производственных машинах, наибольшее применение получили тиристорные и транзисторные с широтно-импульсной модуляцией (ШИМ) преобразователи. Транзисторные преобразователи применяются в маломощных приводах (до 0,5 кВт) и для низковольтных ЭМ. Тиристорные преобразователи целесообразно применять для более мощных приводов с высокомоментными ЭМ [15].

Несомненно, что в настоящее время на первую позицию выдвигаются микропроцессорные системы [16], поскольку они позволяют существенно повысить гибкость управления, реализуя при этом в реальном масштабе времени как сложные алгоритмы цифрового управления, так и сложные алгоритмы перестройки управляющих структур электропривода.

Так как процессы, происходящие в механической системе и в остальных элементах ЦСС взаимосвязаны, то полная система уравнений ЦСС будет состоять из:

1. Уравнений объекта управления (ОУ) –

1)

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^a A_{\alpha p} \ddot{\eta}_p + \sum_{s=1}^{n-a} A_{\alpha, a+s} \ddot{q}_{a+s} + \sum_{p=1}^a \sum_{s=1}^{n-a} [a + s, p, \alpha] \cdot \dot{\eta}_p \dot{q}_{a+s} + \\ & + \sum_{m=1}^{n-a} \sum_{s=1}^{n-a} [a + m, a + s, \alpha] \cdot \dot{q}_{a+m} \dot{q}_{a+s} + \sum_{\alpha_1=1}^a \sum_{p=1}^a [\alpha_1, p, \alpha] \cdot \dot{\eta}_{\alpha_1} \dot{\eta}_p = \\ & = Q_{\alpha} - (J_{\gamma})_{\alpha} \cdot (i_{\gamma})_{\alpha}^2 \cdot \ddot{\eta}_{\alpha} \cdot - (i_{\gamma})_{\alpha} p_{\alpha} (M_b)_{\alpha} [((i_A)_{\alpha} \cdot (i_a)_{\alpha} + (i_B)_{\alpha} \cdot (i_b)_{\alpha}) \cdot \\ & \cdot \sin(p_{\alpha} \gamma) + ((i_A)_{\alpha} \cdot (i_b)_{\alpha} - (i_B)_{\alpha} \cdot (i_a)_{\alpha}) \cdot \cos(p_{\alpha} \gamma)], \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^a A_{a+s, \alpha} \ddot{\eta}_{\alpha} + \sum_{m=1}^{n-a} A_{a+s, a+m} \ddot{q}_{a+m} + \sum_{m=1}^{n-a} \sum_{e=1}^{n-a} [a + m, a + e, a + s] \cdot \dot{q}_{a+m} \dot{q}_{a+e} + \\ & + \sum_{p=1}^a \sum_{\alpha=1}^a [\alpha, p, a + s, \alpha] \cdot \dot{\eta}_p \dot{\eta}_{\alpha} + \sum_{m=1}^{n-a} \sum_{\alpha=1}^a [\alpha, a + m, a + s, \alpha] \cdot \dot{q}_{a+m} \dot{\eta}_{\alpha} = \\ & = Q_{a+s} - (i_{\gamma})_{a+s} \cdot (J_{\gamma})_{a+s} \cdot \ddot{q}_{a+s} - (i_{\gamma})_{a+s} p_{a+s} \cdot \\ & \cdot (M_b)_{a+s} [((i_A)_{a+s} \cdot (i_a)_{a+s} + (i_B)_{a+s} \cdot (i_b)_{a+s}) \cdot \sin(p_{a+s} \gamma) + \\ & + ((i_A)_{a+s} \cdot (i_b)_{a+s} - (i_B)_{a+s} \cdot (i_a)_{a+s}) \cdot \cos(p_{a+s} \gamma)]. \end{aligned} \quad (3)$$

II. Уравнений электрических процессов в асинхронных машинах, эксплуатируемых в режиме двигателя [19] –

$$\begin{aligned}
 & (L_s)_j \cdot (\dot{i}_A)_j + (M_b)_j [(i_a)_j \cdot \cos(p_j \gamma) - (i_b)_j \cdot \sin(p_j \gamma)] - (M_b)_j p_j \dot{\gamma} \cdot \\
 & \cdot [(i_a)_j \cdot \sin(p_j \gamma) - (i_b)_j \cdot \cos(p_j \gamma)] + (R_s)_j \cdot (i_A)_j = (U_s^{VI})_j \cos(w_s t), \\
 & (L_s)_j \cdot (\dot{i}_B)_j + (M_b)_j [(i_a)_j \cdot \sin(p_j \gamma) - (i_b)_j \cdot \cos(p_j \gamma)] - (M_b)_j p_j \dot{\gamma} \cdot \\
 & \cdot [(i_a)_j \cdot \cos(p_j \gamma) - (i_b)_j \cdot \sin(p_j \gamma)] + (R_s)_j \cdot (i_B)_j = (U_s^{VII})_j \sin(w_s t) \\
 & (M_b)_j [(i_A)_j \cdot \cos(p_j \gamma) - (i_B)_j \cdot \sin(p_j \gamma)] - (M_b)_j p_j \dot{\gamma} \cdot \\
 & \cdot [(i_A)_j \cdot \sin(p_j \gamma) - (i_B)_j \cdot \cos(p_j \gamma)] + (L_r)_j \cdot (i_A)_j + (R_r)_j \cdot (i_a)_j = 0 \\
 & (M_b)_j [(i_A)_j \cdot \sin(p_j \gamma) - (i_B)_j \cdot \cos(p_j \gamma)] - (M_b)_j p_j \dot{\gamma} \cdot \\
 & \cdot [(i_A)_j \cdot \cos(p_j \gamma) - (i_B)_j \cdot \sin(p_j \gamma)] + (L_r)_j \cdot (i_b)_j + (R_r)_j \cdot (i_b)_j = 0
 \end{aligned}$$

$(\alpha=1, \dots, a; \quad s=1, \dots, n-a; \quad j=1, \dots, n), \quad (4)$

где L_s, L_r, R_s, R_r – индуктивные и активные сопротивления фазы обмотки статора и ротора; $(M_b)_j$ – максимальное значение взаимоиנדукции j -го двигателя; i_A, i_B, i_a, i_b – токи в фазных обмотках статора и ротора. Ротор в установившемся двигательном режиме вращается с постоянной угловой скоростью $\dot{\gamma} = \omega = const$; p_j – число пар полюсов j -го двигателя.

В короткозамкнутых обмотках ротора индуцируются ЭДС, а в их контурах текут токи, изменяющиеся по гармоническому закону с частотой $\omega_r = \omega_s - p\omega = S\omega_s$, здесь S – безразмерный параметр, называемый скольжением.

III. Уравнений ЦВМ [4] –

$$T_j^{ЦВМ} \dot{x}_j^{ЦВМ} + x_j^{ЦВМ} = f_j(x_{j_1}^D, \dots, x_n^D, \dots), \quad (j=1, \dots, n), \quad (5)$$

где $x_j^{ЦВМ}$ – выходные параметры (коды) ЦВМ; $T_j^{ЦВМ}$ – время запаздывания ЦВМ; f_j – некоторая функция своих аргументов.

IV. Уравнения преобразователя кода в напряжение (ПКН) [4] –

$$T_j^{ПКН} \dot{U}_j^{ПКН} + U_j^{ПКН} = K_j^{ПКН} \cdot x_j^{ЦВМ}, \quad (j=1, \dots, n), \quad (6)$$

где $U_j^{ПКН}$ – выходной параметр ПКН, $T_j^{ПКН}$ – время запаздывания ПКН, $K_j^{ПКН}$ – коэффициент передачи.

V. Уравнений усилительно – преобразовательного устройства (УПУ) [4] –

$$T_j^{УП} \dot{U}_j^{УП} + U_j^{УП} = K_j^{УП} \cdot U_j^{ПКН} \quad (j=1, \dots, n), \quad (7)$$

где $U_j^{УП}$ – выходной параметр УП, $T_j^{УП}$ – время запаздывания УП, $K_j^{УП}$ – коэффициент передачи.

Уравнения (3)–(7) в совокупности составляют полную систему уравнений ЦСС, когда в качестве исполнительного элемента используется асинхронный двигатель (АД).

Движение, выполняемое ОУ на многообразии, определяемом сервосвязями (1), примем за невозмущенное, а все другие движения, выполняемые на многообразии, определяемые уравнениями (2) – возмущенными.

Для определения закона формирования управляющих воздействий (кодов) ЦВМ, обеспечивающих устойчивое осуществление сервосвязей (1), вместо системы уравнений (3) составим уравнения.

1)

$$\sum_{s=1}^{n-a} \sum_{m=1}^{n-a} [a + m, a + s, \alpha]^p \cdot \dot{q}_{a+m} \dot{q}_{a+s} - Q_{\alpha}^o - \sum_{p=1}^a (\kappa_{\alpha p}' \dot{\eta}_p + \kappa_{\alpha p}'' \eta_p) + (J_{ял})_{\alpha} \cdot (i_{я})_{\alpha}^2 \cdot \ddot{\eta}_{\alpha} - (i_{я})_{\alpha} P_{\alpha} (M_b)_{\alpha} [(i_A)_{\alpha} \cdot (i_a)_{\alpha} + (i_B)_{\alpha} \cdot (i_b)_{\alpha}] \cdot \sin(p_{\alpha} \gamma) + ((i_A)_{\alpha} \cdot (i_b)_{\alpha} - (i_B)_{\alpha} \cdot (i_a)_{\alpha}) \cdot \cos(p_{\alpha} \gamma) = 0 ;$$

2)

$$\sum_{e=1}^{n-a} \sum_{m=1}^{n-a} [a + m, a + e, a + s]^o \cdot \dot{q}_{a+m} \dot{q}_{a+e} - Q_{a+s}^o - (J_{ял})_{a+s} \cdot (i_{я})_{a+s}^2 \cdot \dot{q}_{a+s} - (i_{я})_{a+s} P_{a+s} (M_b)_{a+s} \cdot [((i_A)_{a+s} \cdot (i_a)_{a+s} + (i_B)_{a+s} \cdot (i_b)_{a+s}) \cdot \sin(p_{a+s} \gamma) + ((i_A)_{a+s} \cdot (i_b)_{a+s} - (i_B)_{a+s} \cdot (i_a)_{a+s}) \cdot \cos(p_{a+s} \gamma)] = 0$$

$$(\alpha=1, \dots, a; \quad s=1, \dots, n-a), \quad (8)$$

где нулик сверху соответствует значениям выражений в невозмущенном движении, т.е.

$$[a + s, p, \alpha]^p = [a + s, p, \alpha]_{\eta_p = 0}.$$

Из системы уравнений (3)–(8) могут быть определены законы формирования управляющих воздействий ЦВМ, которые обеспечивали бы устойчивое осуществление соотношений сервосвязей (1).

Воспользуясь переходом от токов i_A, i_B, i_a, i_b к квазитокам $i_{su}, i_{sv}, i_{ru}, i_{rv}$ с помощью преобразований

$$\begin{cases} i_{su} = i_A \cdot \cos \omega_s t + i_B \cdot \sin \omega_s t, \\ i_{ru} = i_a \cdot \cos (\omega_s t - \varphi) + i_b \cdot \sin (\omega_s t - \varphi) \\ i_{sv} = -i_A \cdot \sin \omega_s t + i_B \cdot \cos \omega_s t \\ i_{rv} = -i_a \cdot \sin (\omega_s t - \varphi) + i_b \cdot \cos (\omega_s t - \varphi) \end{cases}$$

системы уравнений (8) и (4) для $p_j=1$ приведем к виду:

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{s=1}^{n-a} \sum_{m=1}^{n-a} [a+m, a+s, \alpha]^p \cdot \dot{q}_{a+m} \dot{q}_{a+s} - Q_{\alpha}^o - \\ & - \sum_{p=1}^a (\kappa_{\alpha p}' \dot{\eta}_p + \kappa_{\alpha p}'' \eta_p) + \\ & + (J_{\alpha})_{\alpha} \cdot (i_{\alpha})^2 \cdot \ddot{\eta}_{\alpha} + (i_{\alpha})_{\alpha} \cdot (M_b)_{\alpha} [(i_{sv})_{\alpha} \cdot (i_{ru})_{\alpha} - (i_{su})_{\alpha} \cdot (i_{rv})_{\alpha}] = 0, \\ & \sum_{e=1}^{n-a} \sum_{m=1}^{n-a} [a+m, a+e, a+s]^o \cdot \dot{q}_{a+m} \dot{q}_{a+e} - Q_{a+s}^o + (J_{\alpha})_{a+s} \cdot (i_{\alpha})_{a+s}^2 \cdot \ddot{q}_{a+s} + \\ & + (i_{\alpha})_{a+s} \cdot (M_b)_{a+s} [(i_{sv})_{a+s} \cdot (i_{ru})_{a+s} - (i_{su})_{a+s} \cdot (i_{rv})_{a+s}] = 0, \end{aligned} \right. \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \Delta_j (i_{su})_j + (R_s)_j (L_r)_j \cdot (i_{su})_j - [(\omega_s)_j \Delta_j + \omega_j (M_b)_j^2] \cdot (i_{sv})_j - \\ & - (R_r)_j \cdot (M_b)_j (i_{ru})_j - \omega_j (L_r)_j \cdot (M_b)_j (i_{rv})_j = (L_r)_j \cdot (U_s^{yn})_j, \\ & \Delta_j (i_{sv})_j + [(\omega_s)_j \Delta_j + \omega_j (M_b)_j^2] \cdot (i_{su})_j + (R_s)_j (L_r)_j \cdot (i_{sv})_j + \\ & + \omega_j (L_r)_j \cdot (M_b)_j (i_{ru})_j - (R_r)_j \cdot (M_b)_j \cdot (i_{rv})_j = 0, \\ & \Delta_j (i_{ru})_j - (R_s)_j \cdot (M_b)_j \cdot (i_{su})_j + \omega_j (L_s)_j \cdot (M_b)_j \cdot (i_{sv})_j + (R_r)_j \cdot \\ & \cdot (L_s)_j \cdot (i_{ru})_j - [(\omega_s)_j \Delta_j - \omega_j (L_s)_j \cdot (L_r)_j] \cdot (i_{rv})_j = -(M_b)_j (U_s^{yn})_j, \\ & \Delta_j (i_{rv})_j - \omega_j (L_s)_j \cdot (M_b)_j \cdot (i_{su})_j + (R_s)_j \cdot (M_b)_j \cdot (i_{ru})_j + \\ & + [(\omega_s)_j \Delta_j - \omega_j (L_s)_j (L_r)_j] \cdot (i_{ru})_j + (R_r)_j \cdot (L_s)_j \cdot (i_{rv})_j = 0 \end{aligned} \right. \quad (10)$$

где $\Delta_j = (L_s)_j (L_r)_j - (M_b)_j^2$; $(j=1, \dots, n)$.

Рассмотрим стационарное решение системы (10), удовлетворяющие условиям

$$\dot{i}_{su} = \dot{i}_{sv} = \dot{i}_{ru} = \dot{i}_{rv} = 0, \quad \ddot{\eta}_{\alpha} = 0, \quad \ddot{q}_{a+s} = 0. \quad (11)$$

Тогда уравнения (9) будут иметь вид:

$$\sum_{s=1}^{n-a} \sum_{m=1}^{n-a} [a+m, a+s, \alpha]^p \cdot \dot{q}_{a+m} \cdot \dot{q}_{a+s} - Q_{\alpha}^o - \sum_{p=1}^a (\kappa'_{ap} \dot{\eta}_p + \kappa''_{ap} \eta_p) - (i_{\alpha})_{\alpha} \cdot \nabla_{\alpha}^{-2} [(\omega_s)_{\alpha} - (\dot{\eta}_{\alpha})] \cdot (R_r)_{\alpha} \cdot (M_b)_{\alpha}^2 \cdot (U_s)^2 = 0,$$

$$\sum_{e=1}^{n-a} \sum_{m=1}^{n-a} [a+m, a+e, a+s]^p \cdot \dot{q}_{a+m} \cdot \dot{q}_{a+e} - Q_{a+s}^o - (i_{\alpha})_{a+s} \cdot \nabla^{-2} [(\omega_s)_{a+s} - (\dot{\eta}_{a+s})] \cdot (R_r)_{a+s} \cdot (M_b)_{a+s}^2 \cdot (U_s^{VII})_{a+s}^2 = 0, \quad (12)$$

а уравнения (10) при условиях (11) могут быть записаны в виде:

$$(i_{su})_j = \nabla_j^{-2} \{ (R_s)_j (R_r^2)_j + [(\omega_s)_j - (\omega_c)_j] \cdot (\omega_s)_j \cdot (M_b)_j^2 \cdot (R_r)_j + [(\omega_s)_j - (\omega_c)_j]^2 \cdot (L_r)_j^2 \cdot (R_s)_j^2 \} \cdot (U_s^{VII})_j$$

$$(i_{sv})_j = -\nabla_j^{-2} \cdot (\omega_s)_j \{ (L_s)_j (R_r^2)_j + [(\omega_s)_j - (\omega_c)_j]^2 \cdot (L_r)_j \cdot \Delta_j \} \cdot (U_s^{VII})_j$$

$$(i_{ru})_j = \nabla_j^{-2} \cdot [(\omega_s)_j - (\omega_c)_j] \cdot \{ (\omega_s)_j \cdot (L_s)_j (R_s)_j + [(\omega_s)_j - (\omega_c)_j] \cdot (L_r)_j \cdot (R_s)_j \} \cdot (M_b)_j \cdot (U_s^{VII})_j$$

$$(i_{su})_j = \nabla_j^{-2} \cdot [(\omega_s)_j - (\omega_c)_j] \cdot \{ (R_s)_j \cdot (R_r)_j - [(\omega_s)_j - (\omega_c)_j] \cdot (\omega_s)_j \cdot \Delta_j \} \cdot (M_b)_j \cdot (U_s^{VII})_j, \quad (13)$$

где

$$\Delta_j = (L_s)_j \cdot (L_r)_j - (M_b)_j^2,$$

$$\nabla_j^2 = \{ (R_s)_j \cdot (R_r)_j - [(\omega_s)_j - (\omega_c)_j] \cdot (\omega_s)_j \cdot \Delta_j \}^2 + \{ (\omega_s)_j^2 \cdot (L_s)_j \cdot (R_r)_j + [(\omega_s)_j - (\omega_c)_j] \cdot (L_r)_j \cdot (R_s)_j \}^2.$$

Для упрощенной модели ЦСС, т.е. при допущениях:

$$T_j^{ЦВМ} = T_j^{ПКН} = T_j^{VII} = 0, \quad (14)$$

из (5)–(7) получим

$$(U_s^{VII})_j = K_j^{VII} \cdot K_j^{ПКН} \cdot f_j, \quad (j=1, \dots, n) \quad (15)$$

Подставляя (15) на (12), получим:

$$\sum_{s=1}^{n-a} \sum_{m=1}^{n-a} [a+m, a+s, \alpha]^p \cdot \dot{q}_{a+s} \cdot \dot{q}_{a+m} - Q_{\alpha}^o - \sum_{p=1}^a (\kappa'_{ap} \dot{\eta}_p + \kappa''_{ap} \eta_p) - (i_{\alpha})_{\alpha} \cdot \nabla_{\alpha}^{-2} [(\omega_s)_{\alpha} - \dot{\eta}_{\alpha}] \cdot (R_r)_{\alpha} \cdot (M_b)_{\alpha}^2 \cdot (K_{\alpha}^{VII})^2 \cdot (K_{\alpha}^{ПКН})^2 \cdot f_{\alpha}^2 = 0,$$

$$\sum_{m=1}^{n-a} \sum_{e=1}^{n-a} [a+m, a+e, a+s]^p \cdot \dot{q}_{a+m} \cdot \dot{q}_{a+e} - Q_{a+s}^o - (i_{\alpha})_{a+s} \cdot \nabla^{-2} [(\omega_s)_{a+s} - \dot{q}_{a+s}] \cdot (R_r)_{a+s} \cdot (M_b)_{a+s}^2 \cdot (K_{a+s}^{VI})^2 \cdot (K_{a+s}^{PKH})^2 \cdot f_{a+s}^2 = 0,$$

откуда могут быть определены законы формирования управляющих воздействий (кодов) ЦВМ:

$$f_{\alpha} = \left\{ \left\{ \sum_{s=1}^{n-a} \sum_{m=1}^{n-a} [a+m, a+s, \alpha]^p \cdot \dot{q}_{a+s} \cdot \dot{q}_{a+m} - Q_{\alpha}^o - \sum_{p=1}^a (\kappa'_{ap} \dot{\eta}_p + \kappa''_{ap} \eta_p) \right\} / (i_{\alpha})_{\alpha} \cdot \nabla_{\alpha}^{-2} [(\omega_s)_{\alpha} - \dot{\eta}_{\alpha}] \cdot (R_r)_{\alpha} \cdot (M_b)_{\alpha}^2 \cdot (K_{\alpha}^{VI})^2 \cdot (K_{\alpha}^{PKH})^2 \right\}^{1/2}$$

$$f_{a+s} = \left\{ \left\{ \sum_{m=1}^{n-a} \sum_{e=1}^{n-a} [a+m, a+e, a+s]^p \cdot \dot{q}_{a+m} \cdot \dot{q}_{a+e} - Q_{a+s}^o \right\} / (i_{\alpha})_{a+s} \cdot \nabla^{-2} [(\omega_s)_{a+s} - \dot{q}_{a+s}] \cdot (R_r)_{a+s} \cdot (M_b)_{a+s}^2 \cdot (K_{a+s}^{VI})^2 \cdot (K_{a+s}^{PKH})^2 \right\}^{1/2}$$

$$(\alpha=1, \dots, a \quad ; \quad s=1, \dots, n-a), \quad (16)$$

которые будут обеспечивать устойчивость системы (в стационарном режиме) по отношению многообразия, определяемого сервосвязями (1).

Законы формирования управляющих воздействий ЦВМ (16) и были найдены для стационарных режимов, т.е. при предположениях (14). Однако процессы в ЦСС сопровождаются как стационарными режимами, так и переходными процессами. Поэтому необходимо найти законы формирования управляющих воздействий ЦВМ для переходного процесса. Для этого заменив производные конечными разностями:

$$(\dot{I}_b)_{\alpha} = \frac{(I_b)_{\alpha}^{(N+1)} - (I_b)_{\alpha}^{(N)}}{h}, \quad (\dot{I}_b)_{a+s} = \frac{(I_b)_{a+s}^{(N+1)} - (I_b)_{a+s}^{(N)}}{h},$$

$$(\dot{I}_a)_{\alpha} = \frac{(I_a)_{\alpha}^{(N+1)} - (I_a)_{\alpha}^{(N)}}{h}, \quad (\dot{I}_a)_{a+s} = \frac{(I_a)_{a+s}^{(N+1)} - (I_a)_{a+s}^{(N)}}{h},$$

$$\dot{U}_j^{VI} = \frac{(U_j^{VI})^{N+1} - (U_j^{VI})^N}{h}, \quad \dot{U}_j^{PKH} = \frac{(U_j^{PKH})^{N+1} - (U_j^{PKH})^N}{h},$$

$$\dot{x}_j^{ЦВМ} = \frac{(x_j^{ЦВМ})^{N+1} - (x_j^{ЦВМ})^N}{h},$$

из системы уравнений (9), (10), (3)–(7) получим:

$$\begin{aligned}
 (i_{su})_{\alpha}^{N+1} &= \frac{1}{(i_{\alpha})_{\alpha} \cdot (M_b)_{\alpha} \cdot (i_{rv})_{\alpha}^N} \left\{ \sum_{s=1}^{n-a} \sum_{m=1}^{n-a} [a+m, a+s, \alpha]^p \cdot \dot{q}_{a+m} \dot{q}_{a+s} - Q_{\alpha}^o - \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{p=1}^a (\kappa_{\omega p}^{\prime} \dot{\eta}_p + \kappa_{\omega p}^{\prime\prime} \eta_p) + (J_{\alpha})_{\alpha} \cdot (i_{\alpha})_{\alpha}^2 \cdot \ddot{\eta}_{\alpha} + (i_{\alpha})_{\alpha} \cdot (M_b)_{\alpha} \cdot (i_{sv})_{\alpha}^N \cdot (i_{ru})_{\alpha}^N \right\}, \\
 (i_{su})_{a+s}^{N+1} &= \frac{1}{(i_{\alpha})_{a+s} \cdot (M_b)_{a+s} \cdot (i_{rv})_{a+s}^N} \left\{ \sum_{e=1}^{n-a} \sum_{m=1}^{n-a} [a+m, a+e, a+s]^p \cdot \dot{q}_{a+e} \dot{q}_{a+m} - \right. \\
 &\quad \left. - Q_{a+s}^o + (J_{\alpha})_{a+s} \cdot (i_{\alpha})_{a+s}^2 \cdot \ddot{q}_{a+s} + (i_{\alpha})_{a+s} \cdot (M_b)_{a+s} \cdot (i_{sv})_{a+s}^N \cdot (i_{ru})_{a+s}^N \right\} \\
 &\quad (\alpha=1, \dots, a; \quad s=1, \dots, n-a), \\
 (U_s^{VII})_j^{N+1} &= \frac{1}{(L_r)_j} \left\{ \Delta_j \frac{(i_{su})_j^{N+1} - (i_{su})_j^N}{h_j} + (R_s)_j (L_r)_j (i_{su})_j^{N+1} - \right. \\
 &\quad \left. - [(\omega_s)_j \Delta_j + \omega_j (M_b)_j^2] \cdot (i_{sv})_j^N - (R_r)_j (M_b)_j (i_{ru})_j^N - \omega_j (L_r)_j (M_b)_j (i_{rv})_j^N \right\}, \\
 (i_{sv})_j^{N+1} &= (i_{sv})_j^N - h_j \left\{ [(\omega_s)_j \Delta_j + \omega_j (M_b)_j^2] \cdot (i_{su})_j^{N+1} + (R_s)_j (L_r)_j \cdot \right. \\
 &\quad \left. \cdot (i_{sv})_j^N + \omega_j (L_r)_j (M_b)_j (i_{ru})_j^N - (R_r)_j (M_b)_j (i_{ru})_j^N \right\}, \\
 (i_{ru})_j^{N+1} &= (i_{ru})_j^N - h_j \cdot \left\{ (R_s)_j (M_b)_j (i_{su})_j^{N+1} - \omega_j (L_s)_j (M_b)_j (i_{sv})_j^{N+1} - \right. \\
 &\quad \left. - (R_r)_j (L_s)_j (i_{sv})_j^N + [(\omega_s)_j \Delta_j - \omega_j (L_s)_j (L_r)_j] \cdot (i_{ru})_j^N - (M_b)_j (U_s^{VII})_j^{N+1} \right\}, \\
 (i_{rv})_j^{N+1} &= (i_{rv})_j^N - h_j \left\{ \omega_j (L_s)_j (M_b)_j (i_{su})_j^{N+1} + (R_s)_j (M_b)_j (i_{sv})_j^{N+1} - \right. \\
 &\quad \left. - [(\omega_s)_j \Delta_j - \omega_j (L_s)_j (L_r)_j] \cdot (i_{ru})_j^N - (R_r)_j (L_s)_j (i_{rv})_j^{N+1} \right\}, \\
 (U_j^{PKH})^{N+1} &= \frac{1}{K_j^{VII}} \left\{ T_j^{VII} \cdot \frac{(U_s^{VII})_j^{N+1} - (U_s^{VII})_j^N}{h_j} + (U_s^{VII})_j^{N+1} \right\}, \\
 (f_j)^{N+1} &= T_j \cdot \frac{(x_j^{IBM})^{N+1} - (x_j^{IBM})^N}{h_j} + (x_j^{IBM})^{N+1}, \\
 &\quad (j=1, \dots, n). \tag{17}
 \end{aligned}$$

На языке C+ составлена программа, реализующая алгоритм (17). Для классической задачи А. Бегена с пластинкой и диском [1] вычисления осуществлены при следующих значениях параметров ЦСС [16]:

$$\begin{aligned}
 K^{PKH} &= 26 \text{ сек}, & T^{PKH} &= 0,003 \text{ сек}, & i_{\alpha} &= 50, \\
 T^{VII} &= 0,01 \text{ сек}, & T^{IBM} &= 0,001 \text{ сек}, & K^{VII} &= 26,
 \end{aligned}$$

параметрах двигателя 2ПБВ 100L [15]:

$$I_{ном} = 25 \text{ А}, K_m = 10,8 \text{ мс}, K_w = 5,75 \text{ мс}$$

$$J_я = 13 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, L = 0,8 \text{ мГн},$$

и следующих значениях системы "диск–пластинка":

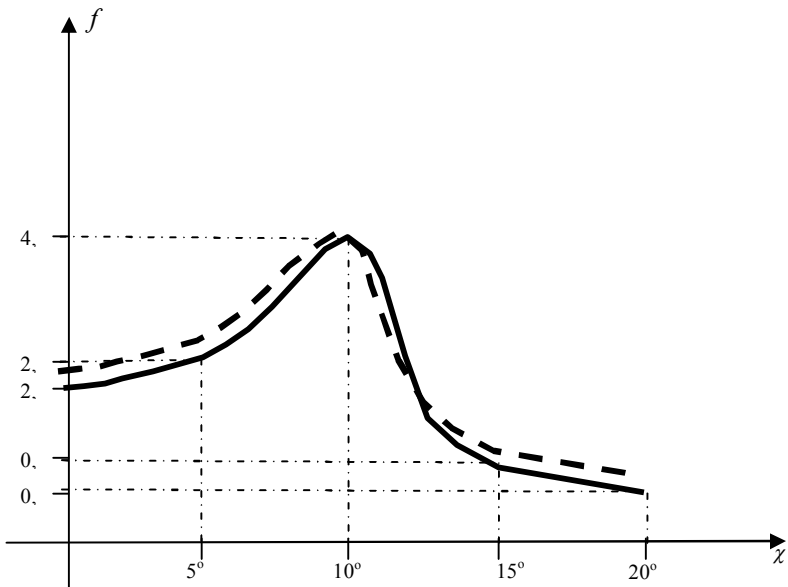
$$m = 1 \text{ кг}, \quad \dot{\chi} = 3 \text{ сек}^{-1}, \quad \ddot{\chi} = 4 \text{ сек}^{-2},$$

$$J_I = 2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad \dot{\eta} = 2 \text{ сек}^{-1}, \quad \ddot{\eta} = 2 \text{ сек}^{-2},$$

$$r_I = 1 \text{ м}, \quad h_{I0} = 10, \quad h_{II} = 10,$$

$$b = 1 \text{ м}, \quad F = 10 \text{ Н}, \quad \kappa = 1 \text{ м},$$

$$a = 1,5 \text{ м}.$$



Изменение закона формирования управляющих воздействий ЦВМ как функции угла χ

Полученные численные и теоретические результаты изображены на графике. Анализ численных и теоретических результатов показывает, что численные результаты отличаются от теоретических на 10–15 %.

Библиографический список

1. *Беген А.* Теория гироскопических компасов. М.: Наука, 1967. 192 с.
2. *Appel P.* Sur les une forme generale des equations de la dynamique (memorial des Sciences Mathematique, fascicule 1). Paris, 1925. С. 1–50.
3. *Przeborsri A.* Die allgemeinsten Gleichunden der Klassischen Dunamik., Math., teitschift. Т. 36, № 2. С. 184–194.
4. *Новоселов В.С.* Применение нелинейных неголономных координат в аналитической механике // Уч. зап. ЛГУ. 1967. №217. С. 50–83.
5. *Шульгин М.Ф.* О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической динамики и их интегрировании: науч. тр. / Среднеазиатский гос. ун-т, 1958. Вып. 4. 183 с.
6. *Румянцев В.В.* О движении некоторых систем с неидеальными связями // Вестник МГУ. Сер. Математика. Механика. 1961. С.61–66.
7. *Румянцев В.В.* О движении управляемых механических систем // Прикладная математика и механика. 1976. Т. 40. Вып.5. С. 771–781.
8. *Киргетов В.И.* О движении управляемых механических систем с условными связями (сервосвязями) // Прикладная математика и механика 1967. Т. 31. Вып. 3. С. 433–446.
9. *Тешаев М.Х.* К задаче стабилизации движений механических систем, стесненных геометрическими и кинематическими сервосвязями // Изв. вузов. Поволжский регион. 2009. № 4 (12). С. 27–38.
10. *Азизов А.Г.* Прикладные задачи динамики управляемых систем / Учеб. пособие. Ташкент, 1980. 23 с.
11. *Нугманова Ш.С.* Об уравнениях движения регулируемых систем // Тр. Казан. авиац. ин-та. 1953. Т. 27. С. 26–35.
12. *Четаев Н.Г.* О принципе Гаусса // В кн.: Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: АН СССР, 1962. С. 311–316.
13. *Четаев Н.Г.* О вынужденных движениях // В кн.: Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: изд-во АН СССР, 1962. С. 329–334.

14. *Основы проектирования следящих систем* / под ред. Н.А. Лакоты. М.: Машиностроение, 1978. 391 с.
15. *Сафонов Ю.М.* Электродвигатели промышленных роботов. М.: Энергоиздат, 1990. 176 с.
16. *Вейц В.Л., Вербовой П.Ф., Волсберг О.Л., Сьянов А.М.* Синтез электромеханических приводов с цифровым управлением. Киев: Наукова Думка, 1991. 232 с.
17. *Тешаев М.Х.* Об осуществлении сервосвязей электромеханической следящей системой // Изв. ВУЗов. Математика. Россия. Казань, 2010. № 12. С.44–51.
18. *Бурдаков С.Ф., Первозванский А.А.* Динамический расчет электромеханических следящих приводов промышленных роботов: Учеб. пособие. Л.: изд-во ЛГУ, 1982. 72 с.
19. *Бесекерский В.А., Попов Е.П.* Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1975. 768 с.
20. *Галиулин А.С., Мухарлямов Р.Г., Мухаметзянов И.А., Фурасов В.Д.* Построение систем программного движения. М.: Наука, 1971. 352 с.
21. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз. 1961. 824 с.
22. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз. 1959. 211 с.
23. *Меркин Г.Д.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1987. 304 с.