ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ
Нелинейные динамические системы

Вып. 46 **Межвузовский сборник научных трудов** **2014**

УДК 004.9

А.Ш. Кусяков
Пермский государственный национальный исследовательский университет

Россия, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15
kusyakov@psu.ru; (342) 239-560

ПРОЕКТИРОВАНИЕ КОМПОЗИТНЫХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

Приведен алгоритм проектирования композитной трехслойной пластинки, находящейся под действием сжимающих нагрузок. В основе предлагаемого алгоритма лежит идея разделения параметров оптимизации на две группы: первая группа параметров определяется только из условий прочности, а вторая – из условий устойчивости.

Ключевые слова: пластина; композит; проектирование.

Рассматривается прямоугольная трехслойная пластинка длиной a и шириной b, находящаяся под действием сжимающих нагрузок.

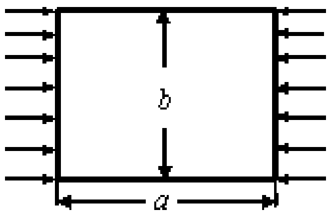

Рис. 1. Пластинка, сжатая в одном направлении

Предполагается, что оба несущих слоя представляют собой одинаковые тонкие пластинки, образованные продольно-поперечной укладкой однонаправленных монослоев, а заполнитель – сплошное однородное тело.

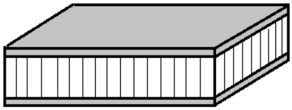

Рис. 2. Элемент трехслойной пластинки

Введем следующие обозначения: h – толщина одного несущего слоя; $2H$ – толщина заполнителя; θ_0 и θ_{90} – относительные содержания продольных и поперечных монослоев соответственно; ρ_0 – плотность материала несущих слоев; ρ_z – плотность материала заполнителя.

Задача оптимального проектирования формулируется следующим образом: найти неотрицательные значения параметров h, θ_0, θ_{90} и H, которые обеспечивают минимум массы конструкции

$$G = 2ab(\rho_0 h + \rho_z H) \qquad (1)$$

при наличии ограничений

$$\theta_0 + \theta_{90} = 1; \qquad (2)$$

$$\frac{q}{q_{cr}} \leq 1; \qquad (3)$$

$$\psi \leq 1. \qquad (4)$$

Здесь равенство (2) – структурное ограничение; неравенство (3) – ограничение по устойчивости; q – заданная сжимающая нагрузка; q_{cr} – критическая нагрузка, при которой происходит потеря устойчивости; неравенство (4) – символическая запись ограничения по прочности.

При построении ограничения по устойчивости воспользуемся известной моделью трехслойной пластинки, основанной на гипотезе ломаной линии [2, 3, 5, 6, 11]. Введем прямоугольную систему координат (x, y, z), поместив начало координат в левый верхний угол пластинки (рис.1). Ось x направим по горизонтали вправо, а ось y – по вертикали вниз. Обозначим через u_1, u_2 смещения по направлению оси x точек срединных поверхностей верхнего и нижнего несущих слоев соответственно, а через v_1, v_2 – аналогичные величины по направлению оси y.

Прогибы w (смещения по направлению оси z, перпендикулярно плоскости пластинки) несущих слоев и заполнителя, по предположению, совпадают. Система разрешающих уравнений устойчивости имеет вид:

$$C_{11}\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x^2}+C_{12}\frac{\partial^2 v_\beta}{\partial x\partial y}+\frac{G_{xz}}{H}\left(u_\beta-\left(H+\frac{h}{2}\right)\frac{\partial w}{\partial x}\right)=0, \qquad (5)$$

$$C_{22}\frac{\partial^2 v_\beta}{\partial x^2}+C_{12}\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x\partial y}+\frac{G_{yz}}{H}\left(v_\beta-\left(H+\frac{h}{2}\right)\frac{\partial w}{\partial y}\right)=0, \qquad (6)$$

$$Iw+\left(H+\frac{h}{2}\right)\left(I_1\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x}\right)+I_2\left(\frac{\partial v_\beta}{\partial y}\right)\right)+\frac{q}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0, \qquad (7)$$

где

$$I=D_{11}\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\left(D_{12}+2D_{66}\right)\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4}{\partial y^4}\ , \qquad (8)$$

$$I_1=C_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\left(C_{12}+C_{66}\right)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\ , \qquad (9)$$

$$I_2=C_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\left(C_{12}+C_{66}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ ; \qquad (10)$$

$$u_\beta=\frac{u_1-u_2}{2}, \qquad (11)$$

$$v_\beta=\frac{v_1-v_2}{2}. \qquad (12)$$

Здесь C_{ij} – компоненты матрицы мембранной жесткости одного несущего слоя ($i,\ j=1,2,6$); D_{ij} – компоненты матрицы изгибной жесткости одного несущего слоя ($i,\ j = 1,2,6$); G_{xz}, G_{yz} – модули поперечного сдвига заполнителя.

Найдем решение задачи, полагая, что несущие слои пластинки соединены диафрагмой. В этом случае решение системы (5)–(7) можно искать в виде [3]:

$$w = A\sin\frac{\pi mx}{a}\sin\frac{\pi ny}{b}, \tag{13}$$

$$u_\beta = B\cos\frac{\pi mx}{a}\sin\frac{\pi ny}{b}, \tag{14}$$

$$v_\beta = C\sin\frac{\pi mx}{a}\cos\frac{\pi ny}{b}, \tag{15}$$

где m и n целые числа. Подставив выражения (13)–(14) в систему (5)–(7), получим однородную систему уравнений, равенство нулю определителя которой приводит к выражению для параметра нагрузки

$$q = q(m,n), \tag{16}$$

Критическая нагрузка определяется из условия минимума параметра нагрузки (16) по числам m и n

$$q_{cr} = \min_{(m,n)}\left[q(m,n)\right]. \tag{17}$$

Отметим, что из анализа структуры выражения для параметра нагрузки следует, что наименьшему значению $q = q(m,n)$ соответствует $n = 1$. Таким образом, фактически, критическая нагрузка определяется путем минимизации (16) только по величине m.

При построении ограничений по прочности, будем полагать, что вся нагрузка воспринимается только продольными слоями обшивок, т. е. маложесткий заполнитель и поперечные слои нагрузки не несут. Тогда, в рамках данного предположения, условие прочности можно представить в виде:

$$\frac{\sigma}{\sigma_в} \le 1, \tag{18}$$

где $$\sigma = \frac{q_0}{2h}, \quad \sigma_в = \frac{C_{11}}{b_{11}h}\sigma_{-1в} \ . \tag{19}$$

Здесь b_{11} и $\sigma_{-1в}$ – соответственно жесткость и предел прочности при сжатии монослоя в направлении волокон; q_0 – заданная сжимающая нагрузка.

Численные исследования задачи (1)–(4) методами нелинейного математического программирования показали, что наибольший эффект достигается в основном за счет изменения толщины заполнителя, а не счет варьирования числом продольных и поперечных слоев обшивок. В этом состоит основное отличие оптимизационного расчета трехслойной пластинки от аналогичного расчета обычной многослойной пластинки [10].

При проектировании трехслойных пластин можно использовать метод разделения параметров оптимизации на две группы: первая группа параметров определяется из условий прочности (толщины обшивок), а вторая группа (толщина заполнителя) – из условий устойчивости. Рекомендуемый алгоритм оптимального проектирования трехслойной пластинки, построенный на основе метода разделения параметров оптимизации состоит из следующих шагов.

1. Полагаем, что несущие слои состоят только из продольных монослоев: $\theta_0 = 1$.

2. По известной величине сжимающей нагрузки и пределу прочности материала при сжатии вычисляем толщину одного несущего слоя $h = q_0/(2\sigma_{-1b})$.

3. Вычисляем величину критической нагрузки для трехслойной пластинки при $H=0$. Проверяем выполнение условия устойчивости (3). Если это условие выполняется, то процесс оптимального проектирования завершается. Если условие (3) нарушается, то решаем уравнение относительно одного неизвестного H.

$$q_{cr}(H) = q_0.$$

Здесь q_0 – заданная сжимающая нагрузка.

4. По найденным значениям толщин обшивок и заполнителя вычисляем массу оптимальной трехслойной пластинки (1).

В случае необходимости можно провести уточненные расчеты в любой системе инженерного анализа, например, в пакете ANSYS [1, 8]. Представленный алгоритм легко реализуется, например, в системах Mathematica [4] или Mathcad [9] и может быть использован при проведении типовых оптимизационных расчетов трехслойных пластин с многослойными обшивками.

Библиографический список

1.*Басов К.А.* ANSYS: Справочник пользователя. М.: ДМК Пресс, 2005. 640с.

2.*Васильев В.В.* Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.

3.*Вольмир А.С.* Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963. 880 с.

4.*Воробъев Е.М.* Введение в систему "Математика". М.: Финансы и статистика, 1998. 262 с.

5.*Григолюк Э.И., Чулков П.П.* Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М.: Машиностроение, 1973. 170 с.

6.*Кобелев В.Н., Коварский Л.М., Тимофеев С.И.* Расчет трехслойных конструкций справочник. М.: Машиностроение, 1984. 304 с.

7.*Кусяков А.Ш.* Трехслойные оболочки минимальной массы // Вестник Пермского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2005. Вып.2. С. 166–173.

8.*Кусяков А.Ш.* Конечно-элементное моделирование в среде ANSYS / Перм. гос. ун-т. Пермь, 2007. 150 с.

9.*Макаров Е.Г.* Mathcad: учебный курс. СПб.: Питер, 2009. 384 с.

10. *Кусяков А.Ш.* Проектирование тонких пластин, работающих на устойчивость и прочность // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. Пермь, 2013. Вып. 45. С.30–38.

11. *Сухинин С.Н.* Прикладные задачи устойчивости многослойных композитных оболочек. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 248 с.