ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ
Нелинейные динамические системы

Вып. 46 **Межвузовский сборник научных трудов** **2014**

УДК 519.6

С.В. Лутманов
Пермский государственный национальный исследовательский университет

Россия, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15
mpu@psu.ru; (342) 2-396-309

ПОСТРОЕНИЕ КОМПРОМИССНОГО НАБОРА СТРАТЕГИЙ В ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ НЕСКОЛЬКИХ ЛИЦ

Рассматривается неантагонистическая игра нескольких лиц, в которой интерес каждого игрока, помимо минимизации своей платы, состоит еще и в том, чтобы любой из его оппонентов не мог получить результат лучший (меньший) некоторой заданной величины.
При этом собственный результат игрока должен быть не хуже (не больше) другой заданной величины. В статье принимается, что рациональное поведение участников описанного конфликта состоит в выборе компромиссного набора стратегий, обеспечивающего каждому игроку значение платы не хуже (не больше) верхней оценки платы. Никакое единоличное уклонение игрока от стратегии, предписываемой компромиссным набором, не позволяет ему получить значение платы лучше (меньше) нижней оценки платы.

Ключевые слова: дифференциальная игра; равновесие по Нэшу; компромиссный набор стратегий.

1.Игра в нормальной форме

Одна из основных проблем в исследовании неантагонистической игры состоит в выборе адекватного содержанию задачи понятия решения. Наиболее распространены подходы, основанные на решениях по Дж. Нэшу, Х. Штакельбергу и В. Парето [3]. Легко устанавливается, что стратегии, оптимальные в одном из указанных смыслов, не являются оптимальными в другом смысле. Поэтому существует определенная свобода в выборе принципа рационального действия участников многостороннего конфликта. В статье вводится понятие компромиссного набора стратегий, смысл которого состоит в том, что для него значение платы игрока должно принадлежать некоторому промежутку (своему для каждого из игроков), границы которого заданы правилами игры. При этом никакое единоличное уклонение игрока от стратегии, предписываемой компромиссным набором, не позволяет ему получить значение платы лучше (меньше) нижней границы указанного промежутка.

Под игрой (необязательно дифференциальной), записанной в нормальной форме, будем понимать тройку

$$\left(K,\left\{\left\{U_i \middle| i\in K\right\},\left\{I_i \middle| i\in K\right\}\right\}\right),$$

где $K=\{1,\cdots,k\}$ – множество номеров игроков, $\{U_i\}$ – множество всех стратегий, а $I_i:\{U_1\}\times\cdots\times\{U_k\}\to R^1$ – функция платы i-го, $i\in K$, игрока. Игра состоит в том, что каждый игрок выбирает независимо от других какую-либо стратегию из своего множества стратегий. В результате складывается ситуация $W=(U_1,\cdots,U_k)$, на которой вычисляется плата $I_i(U_1,\cdots,U_k), i\in K$ каждого из игроков. Игрок заинтересован в минимизации своей платы.

Пусть $S_*=(S_{1*},\cdots,S_{k*})^T, S^*=(S_1^*,\cdots S_k^*)^T$, $S_{i*}\le S_i^*$, $i\in K$. Вектора $S_*,S^*\in R^k$ будем называть соответственно нижними и верхними компромиссными оценками плат игроков.

Определение 1. Ситуация $W^{kom} \in \{W\}$ называется компромиссной по отношению к оценкам $S_*, S^*,$, если для всех $i \in K$ справедливы неравенства

$$S_{i*} \le \min_{U_i \in \{U_i\}} I_i\left(U_1^{komp}, \cdots, U_{i-1}^{komp}, U_i, U_{i+1}^{komp}, \cdots, U_k^{komp}\right) \le$$

$$\le I_i\left(U_1^{komp}, \cdots, U_{i-1}^{komp}, U_i^{komp}, U_{i+1}^{komp}, \cdots, U_k^{komp}\right) \le S_i^*.$$

Заметим, что если некоторая ситуация является компромиссной относительно оценок S_*, S^*, то она будет $\varepsilon-$равновесной при $\varepsilon = \max_{i \in K}\left\{S_i^* - S_{i*}\right\}$ и просто равновесной, если $S_i^* = S_{i*}, i \in K$. Необходимыми условиями существования компромиссных ситуаций служат неравенства

$$S_{i*} \le \min_{U_i \in \{U_i\}} \max_{\{U_1, \cdots, U_i, \cdots, U_k\} \in \prod_{j \in K(i)} \{U_i\}} I_i\left(U_1, \cdots, U_i, \cdots, U_k\right), i \in K.$$

Построение компромиссного набора стратегий в статье осуществляется для конкретной дифференциальной игры нескольких лиц с использованием гладких потенциалов.

2.Гладкие потенциалы в дифференциальных играх нескольких лиц

Рассмотрим дифференциальную игру, динамка которой описывается обыкновенным векторным дифференциальным уравнением $\dot{x} = f\left(t, x, u_1, \cdots, u_k\right).$

Здесь $t \in \left[t_0, T\right] \subset R^1$ – текущее время, $x = \left(x_1, \cdots, x_n\right)^T \in R^n$ – фазовый вектор объекта, $u_i \in P_i \subset R^{r_i}$ – вектор управляющих параметров i-го игрока. Плата i -го игрока определяется формулой $I_i = \sigma_i\left(x\left(T\right)\right)$, где $\sigma_i : R^n \to R^1, i \in K$ – некоторая заданная непрерывная функция, $x\left(\cdot\right)$ – реализация фазового вектора объекта, а T – момент окончания игры.

Важным аспектом построения математической модели конфликтно управляемого динамического объекта является формализация понятия стратегии игрока и движения объекта, отвечающего выбранному набору стратегий игроков. В настоящей работе принят подход, развиваемый в монографиях Н.Н. Красовского и А.И.Субботина [1–2] для антагонистических дифференциальных игр и обобщенный на случай игр нескольких лиц А.Ф. Клейменовым в работе [3]. Указанную формализацию будем называть формализацией дифференциальной игры в классе конструктивных движений. Определение 1 в этом случае принимает следующий вид.

Определение 2. Будем говорить, что набор позиционных стратегий $u_1^{komp}\left[\cdot\right],\cdots,u_k^{komp}\left[\cdot\right]$ всех игроков является компромиссным относительно оценок S_*,S^*, для начальной позиции $\left\{t_*,x_*\right\},t_*\in\left[t_0,T\right]$, если

$$I_i\left[x(\cdot)\right]\le S_i^*\forall x(\cdot)\in X\left[t_*,x_*,\left\{u_j^{komp}\left[\cdot\right]\middle\| j\in K\right\}\right]$$

и

$$I_i\left[x(\cdot)\right]\ge S_{i*}\forall x(\cdot)\in X\left[t_*,x_*,\left\{u_j^{komp}\left[\cdot\right]\middle\| j\in K(i)\right\}\right].$$

Здесь $X\left[t_*,x_*,\left\{u_i^{komp}\left[\cdot\right]\middle\| i\in K\right\}\right],X\left[t_*,x_*,\left\{u_j^{komp}\left[\cdot\right]\middle\| j\in K(i)\right\}\right]$– пучки конструктивных движений, выходящих из начальной позиции $\left(t_*,x_*\right)$ и порожденных компромиссными стратегиями соответственно всех игроков и всех игроков кроме i-го игрока.

Введем понятие гладких потенциалов в дифференциальной игре нескольких лиц.

Определение 3. Пусть $S_*,S^*\in R^k$ нижние и верхние компромиссные оценки. Будем говорить, что набор непрерывных функций

$$\varepsilon_{i*}:R^{n+1}\to R^1,\varepsilon_i^*:R^{n+1}\to R^1,i\in K$$

образует систему гладких потенциалов для этих оценок, если

1. $\varepsilon_{i*}\left(T,x\right)=\varepsilon_i^*\left(T,x\right)=\sigma_i\left(x\right),x\in R^n,i\in K$.

2. Существует число $\alpha > 0$ такое, что для всех $i \in K$ функция ε_{i*} непрерывно дифференцируема в области

$$W_{i*} = \left\{ (t,x) \middle| t \in [t_0, T], S_{i*} - \alpha < \varepsilon_{i*}(t,x) < S_{i*} \right\},$$

а функция ε_i^* непрерывно дифференцируема в области

$$W_i^* = \left\{ (t,x) \middle| t \in [t_0, T], S_i^* < \varepsilon_i^*(t,x) < S_i^* + \alpha \right\}.$$

3. В каждой позиции $(t,x) \in [t_0, T] \times R^n$ существует набор управляющих параметров $\hat{u}_1(t,x), \cdots, \hat{u}_k(t,x)$ такой, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_{i*}(t,x) + \min_{u_i \in P_i} \left\langle \frac{\partial}{\partial x}\varepsilon_{i*}(t,x), f\left(t,x,\hat{u}_1(t,x),\cdots u_i,\cdots,\hat{u}_k(t,x)\right) \right\rangle \geq 0,$$

$$(t,x) \in W_{i*}$$

и $$\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_i^*(t,x) + \left\langle \frac{\partial}{\partial x}\varepsilon_i^*(t,x), f\left(t,x,\hat{u}_1(t,x),\cdots \hat{u}_i(t,x),\cdots,\hat{u}_k(t,x)\right) \right\rangle \leq 0,$$

$$(t,x) \in W_i^*.$$

Определим набор стратегий всех игроков условием

$$u_i^{komp}(t,x) = \begin{cases} \hat{u}_i(t,x), & (t,x) \in \left(\bigcup\limits_{i \in K} W_{i*} \right) \cup \left(\bigcup\limits_{i \in K} W_i^* \right), \\ \in P_i, & (t,x) \notin \left(\bigcup\limits_{i \in K} W_{i*} \right) \cup \left(\bigcup\limits_{i \in K} W_i^* \right), \end{cases} \quad i \in K.$$

В работе [4] доказана следующая теорема.

Теорема 1. Набор стратегий $u_1^{komp}[\cdot], \cdots, u_k^{komp}[\cdot]$ является компромиссным относительно оценок $S_*, S^* \in R^k$ для любой начальной позиции

$$(t,x) \in W =$$
$$= \left\{ (t,x) \middle| t \in [t_0, T], \varepsilon_{i*}(t,x) \geq S_{i*}, \varepsilon_i^*(t,x) \leq S_i^*, i \in K \right\}.$$

3. Модельный пример

Рассматривается дифференциальная игра трех лиц, динамика которой описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} A\dot{p} + \left(C - B\right) qr &= M_{Ox}^{(1)} + M_{Ox}^{(2)} + M_{Ox}^{(3)}, \\ B\dot{q} + \left(A - C\right) rp &= M_{Oy}^{(1)} + M_{Oy}^{(2)} + M_{Oy}^{(3)}, \\ C\dot{r} + \left(B - A\right) pq &= M_{Oz}^{(1)} + M_{Oz}^{(2)} + M_{Oz}^{(3)}, \end{aligned} \tag{1}$$

Эти уравнения можно трактовать как динамические уравнения Эйлера движения твердого тела относительно неподвижной точки в проекциях на подвижную систему координат, оси которой совпадают с главными осями инерции вращающегося тела. Здесь $p, q, r -$ проекции вектора угловой скорости, $A > B > C > 0 -$ главные моменты инерции твердого тела относительно соответствующих осей координат, $\bar{M}_O^{(i)} = \begin{pmatrix} M_{Ox}^{(i)} \\ M_{Oy}^{(i)} \\ M_{Oz}^{(i)} \end{pmatrix}, i = 1, 2, 3 -$ управляющий момент относительно начала координат O, совпадающего с точкой подвеса тела, $i - го, i = 1, 2, 3$ игрока.

Разрешим уравнения (1) относительно производных фазовых координат

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{B - C}{A} qr + \frac{1}{A}\left(M_{Ox}^{(1)} + M_{Ox}^{(2)} + M_{Ox}^{(3)}\right), \\ \dot{q} &= \frac{C - A}{B} rp + \frac{1}{B}\left(M_{Oy}^{(1)} + M_{Oy}^{(2)} + M_{Oy}^{(3)}\right), \\ \dot{r} &= \frac{A - B}{C} pq + \frac{1}{C}\left(M_{Oz}^{(1)} + M_{Oz}^{(2)} + M_{Oz}^{(3)}\right), \end{aligned} \tag{2}$$

и введем обозначения

$$p = x_1, q = x_2, r = x_3, M_{Ox}^{(i)} = u_1^{(i)}, M_{Oy}^{(i)} = u_2^{(i)}, M_{Oz}^{(i)} = u_3^{(i)}, i = 1, 2, 3.$$

Тогда уравнения (2) принимают вид:

$$\dot{x}_1=\frac{B-C}{A}x_2x_3+\frac{1}{A}\left(u_1^{(1)}+u_1^{(2)}+u_1^{(3)}\right),$$
$$\dot{x}_2=\frac{C-A}{B}x_3x_1+\frac{1}{B}\left(u_2^{(1)}+u_2^{(2)}+u_2^{(3)}\right), \qquad (3)$$
$$\dot{x}_3=\frac{A-B}{C}x_1x_2+\frac{1}{C}\left(u_3^{(1)}+u_3^{(2)}+u_3^{(3)}\right),.$$

На векторы управляющих параметров наложены геометрические ограничения

$$u^{(i)}=\begin{pmatrix}u_1^{(i)}\\ u_2^{(i)}\\ u_3^{(i)}\end{pmatrix}\in P=\left\{\begin{pmatrix}p_1\\ p_2\\ p_3\end{pmatrix}\middle|\, p_1^2+p_2^2+p_3^2\le 1\right\}.$$

Целевыми множествами игроков служат точки $M_i=\left(m_1^{(i)},m_2^{(i)},m_3^{(i)}\right), i=1,2,3$, а их платами – расстояния от фазового вектора в конечный момент времени T до соответствующих целевых множеств. Считаются заданными $S_{1*},S_{2*},S_{3*},S_1^*,S_2^*,S_3^*$, $S_{i*}<S_i^*, i=1,2,3$ – компромиссные оценки игроков.

Гладкие потенциалы будем искать в виде

$$\varepsilon_{i*}\left(t,x_1,x_2,x_3\right)=\sqrt{\left(x_1-m_1^{(i)}\right)^2+\left(x_2-m_2^{(i)}\right)^2+\left(x_3-m_3^{(i)}\right)^2}+$$
$$+\alpha_i\left(t-T\right),\alpha_i>0, i=1,2,3,$$
$$\varepsilon_i^*\left(t,x_1,x_2,x_3\right)=\sqrt{\left(x_1-m_1^{(i)}\right)^2+\left(x_2-m_2^{(i)}\right)^2+\left(x_3-m_3^{(i)}\right)^2}+$$
$$+\beta_i\left(t-T\right),\beta_i>0, i=1,2,3,$$

Параметры $\alpha_i,\beta_i, i=1,2,3$ выбираются из соображений выполнения условия в) в определении 1. Вычислим полную производную функции ε_{i*} в силу системы (3). Имеем

$$\frac{d}{dt}\varepsilon_{i*}\left(t,x_1,x_2,x_3\right)=\frac{\partial\varepsilon_{i*}}{\partial x_1}\left(\frac{B-C}{A}x_2x_3+\frac{1}{A}\left(u_1^{(1)}+u_1^{(2)}+u_1^{(3)}\right)\right)+$$

$$+\frac{\partial \varepsilon_{i*}}{\partial x_2}\left(\frac{C-A}{B}x_3x_1+\frac{1}{B}\left(u_2^{(1)}+u_2^{(2)}+u_2^{(3)}\right)\right)+$$

$$+\frac{\partial \varepsilon_{i*}}{\partial x_3}\left(\frac{A-B}{C}x_1x_2+\frac{1}{C}\left(u_3^{(1)}+u_3^{(2)}+u_3^{(3)}\right)\right)+\frac{\partial \varepsilon_{i*}}{\partial t}=$$

$$=\frac{\partial \varepsilon_{i*}}{\partial x_1}\frac{B-C}{A}x_2x_3+\frac{\partial \varepsilon_{i*}}{\partial x_2}\frac{C-A}{B}x_3x_1+\frac{\partial \varepsilon_{i*}}{\partial x_3}\frac{A-B}{C}x_1x_2+$$

$$+\frac{\partial \varepsilon_{i*}}{\partial x_1}\frac{1}{A}\left(u_1^{(1)}+u_1^{(2)}+u_1^{(3)}\right)+\frac{\partial \varepsilon_{i*}}{\partial x_2}\frac{1}{B}\left(u_2^{(1)}+u_2^{(2)}+u_2^{(3)}\right)+$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{i*}}{\partial x_3}\frac{1}{C}\left(u_3^{(1)}+u_3^{(2)}+u_3^{(3)}\right)+\alpha_i=$$

$$=\frac{\partial \varepsilon_i^*}{\partial x_1}\frac{B-C}{A}x_2x_3+\frac{\partial \varepsilon_i^*}{\partial x_2}\frac{C-A}{B}x_3x_1+\frac{\partial \varepsilon_i^*}{\partial x_3}\frac{A-B}{C}x_1x_2+$$

$$+\frac{1}{A}\frac{\partial \varepsilon_{i*}}{\partial x_1}u_1^{(1)}+\frac{1}{B}\frac{\partial \varepsilon_{i*}}{\partial x_2}u_2^{(1)}+\frac{1}{C}\frac{\partial \varepsilon_{i*}}{\partial x_3}u_3^{(1)}+$$

$$+\frac{1}{A}\frac{\partial \varepsilon_{i*}}{\partial x_1}u_1^{(2)}+\frac{1}{B}\frac{\partial \varepsilon_{i*}}{\partial x_2}u_2^{(2)}+\frac{1}{C}\frac{\partial \varepsilon_{i*}}{\partial x_3}u_3^{(2)}+$$

$$+\frac{1}{A}\frac{\partial \varepsilon_{i*}}{\partial x_1}u_1^{(3)}+\frac{1}{B}\frac{\partial \varepsilon_{i*}}{\partial x_2}u_2^{(3)}+\frac{1}{C}\frac{\partial \varepsilon_{i*}}{\partial x_3}u_3^{(3)}+\alpha_i,\quad i=1,2,3.$$

Полагаем $\varphi_{1*}\left(t,x_1,x_2,x_3,u_1^{(2)},u_2^{(2)},u_3^{(2)},u_1^{(3)},u_2^{(3)},u_3^{(3)}\right)=$

$$=\min_{u^{(1)}\in P_1}\frac{d}{dt}\varepsilon_{1*}\left(t,x_1,x_2,x_3\right)=$$

$$=\frac{\partial \varepsilon_{1*}}{\partial x_1}\frac{B-C}{A}x_2x_3+\frac{\partial \varepsilon_{1*}}{\partial x_2}\frac{C-A}{B}x_3x_1+\frac{\partial \varepsilon_{1*}}{\partial x_3}\frac{A-B}{C}x_1x_2-$$

$$-\sqrt{\left(\frac{1}{A}\frac{\partial \varepsilon_{1*}}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{1}{B}\frac{\partial \varepsilon_{1*}}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{1}{C}\frac{\partial \varepsilon_{1*}}{\partial x_3}\right)^2}+$$

$$+\frac{1}{A}\frac{\partial \varepsilon_{1*}}{\partial x_1}u_1^{(2)}+\frac{1}{B}\frac{\partial \varepsilon_{1*}}{\partial x_2}u_2^{(2)}+\frac{1}{C}\frac{\partial \varepsilon_{1*}}{\partial x_3}u_3^{(2)}+$$

$$+\frac{1}{A}\frac{\partial\varepsilon_{1*}}{\partial x_1}u_1^{(3)}+\frac{1}{B}\frac{\partial\varepsilon_{1*}}{\partial x_2}u_2^{(3)}+\frac{1}{C}\frac{\partial\varepsilon_{1*}}{\partial x_3}u_3^{(3)}+\alpha_1,$$

$$\varphi_{2*}\left(t,x_1,x_2,x_3,u_1^{(1)},u_2^{(1)},u_3^{(1)},u_1^{(3)},u_2^{(3)},u_3^{(3)}\right)=$$

$$=\min_{u^{(2)}\in P_2}\frac{d}{dt}\varepsilon_{2*}\left(t,x_1,x_2,x_3\right)=$$

$$=\frac{\partial\varepsilon_2^*}{\partial x_1}\frac{B-C}{A}x_2x_3+\frac{\partial\varepsilon_2^*}{\partial x_2}\frac{C-A}{B}x_3x_1+\frac{\partial\varepsilon_2^*}{\partial x_3}\frac{A-B}{C}x_1x_2+$$

$$+\frac{1}{A}\frac{\partial\varepsilon_{2*}}{\partial x_1}u_1^{(1)}+\frac{1}{B}\frac{\partial\varepsilon_{2*}}{\partial x_2}u_2^{(1)}+\frac{1}{C}\frac{\partial\varepsilon_{2*}}{\partial x_3}u_3^{(1)}-$$

$$-\sqrt{\left(\frac{1}{A}\frac{\partial\varepsilon_{2*}}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{1}{B}\frac{\partial\varepsilon_{2*}}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{1}{C}\frac{\partial\varepsilon_{2*}}{\partial x_3}\right)^2}+$$

$$+\frac{1}{A}\frac{\partial\varepsilon_{2*}}{\partial x_1}u_1^{(3)}+\frac{1}{B}\frac{\partial\varepsilon_{2*}}{\partial x_2}u_2^{(3)}+\frac{1}{C}\frac{\partial\varepsilon_{2*}}{\partial x_3}u_3^{(3)}+\alpha_2,$$

$$\varphi_{3*}\left(t,x_1,x_2,x_3,u_1^{(1)},u_2^{(1)},u_3^{(1)},u_1^{(2)},u_2^{(2)},u_3^{(2)}\right)=$$

$$=\min_{u^{(3)}\in P_3}\frac{d}{dt}\varepsilon_{3*}\left(t,x_1,x_2,x_3\right)=$$

$$=\frac{\partial\varepsilon_3^*}{\partial x_1}\frac{B-C}{A}x_2x_3+\frac{\partial\varepsilon_3^*}{\partial x_2}\frac{C-A}{B}x_3x_1+\frac{\partial\varepsilon_3^*}{\partial x_3}\frac{A-B}{C}x_1x_2+$$

$$+\frac{1}{A}\frac{\partial\varepsilon_{3*}}{\partial x_1}u_1^{(1)}+\frac{1}{B}\frac{\partial\varepsilon_{3*}}{\partial x_2}u_2^{(1)}+\frac{1}{C}\frac{\partial\varepsilon_{3*}}{\partial x_3}u_3^{(1)}+$$

$$+\frac{1}{A}\frac{\partial\varepsilon_{3*}}{\partial x_1}u_1^{(2)}+\frac{1}{B}\frac{\partial\varepsilon_{3*}}{\partial x_2}u_2^{(2)}+\frac{1}{C}\frac{\partial\varepsilon_{3*}}{\partial x_3}u_3^{(2)}-$$

$$-\sqrt{\left(\frac{1}{A}\frac{\partial\varepsilon_{3*}}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{1}{B}\frac{\partial\varepsilon_{3*}}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{1}{C}\frac{\partial\varepsilon_{3*}}{\partial x_3}\right)^2}+\alpha_3.$$

Вычислим полную производную функции $\varepsilon_i^*, i=1,2,3$ в силу системы (3). Имеем

$$\varphi_1^*\left(t,x_1,x_2,x_3,u_1^{(1)},u_2^{(1)},u_3^{(1)},u_1^{(2)},u_2^{(2)},u_3^{(2)},u_1^{(3)},u_1^{(3)},u_2^{(3)},u_3^{(3)}\right)=$$

$$=\frac{d}{dt}\varepsilon_1^*\left(t,x_1,x_2,x_3\right)=$$

$$=\frac{\partial\varepsilon_1^*}{\partial x_1}\frac{B-C}{A}x_2x_3+\frac{\partial\varepsilon_1^*}{\partial x_2}\frac{C-A}{B}x_3x_1+\frac{\partial\varepsilon_1^*}{\partial x_3}\frac{A-B}{C}x_1x_2+$$

$$+\frac{1}{A}\frac{\partial\varepsilon_1^*}{\partial x_1}u_1^{(1)}+\frac{1}{B}\frac{\partial\varepsilon_1^*}{\partial x_2}u_2^{(1)}+\frac{1}{C}\frac{\partial\varepsilon_1^*}{\partial x_3}u_3^{(1)}+$$

$$+\frac{1}{A}\frac{\partial\varepsilon_1^*}{\partial x_1}u_1^{(2)}+\frac{1}{B}\frac{\partial\varepsilon_1^*}{\partial x_2}u_2^{(2)}+\frac{1}{C}\frac{\partial\varepsilon_1^*}{\partial x_3}u_3^{(2)}+$$

$$+\frac{1}{A}\frac{\partial\varepsilon_1^*}{\partial x_1}u_1^{(3)}+\frac{1}{B}\frac{\partial\varepsilon_1^*}{\partial x_2}u_2^{(3)}+\frac{1}{C}\frac{\partial\varepsilon_1^*}{\partial x_3}u_3^{(3)}+\beta_1,$$

$$\varphi_2^*\left(t,x_1,x_2,x_3,u_1^{(1)},u_2^{(1)},u_3^{(1)},u_1^{(2)},u_2^{(2)},u_3^{(2)},u_1^{(3)},u_1^{(3)},u_2^{(3)},u_3^{(3)}\right)=$$

$$=\frac{d}{dt}\varepsilon_2^*\left(t,x_1,x_2,x_3\right)=$$

$$=\frac{\partial\varepsilon_2^*}{\partial x_1}\frac{B-C}{A}x_2x_3+\frac{\partial\varepsilon_2^*}{\partial x_2}\frac{C-A}{B}x_3x_1+\frac{\partial\varepsilon_2^*}{\partial x_3}\frac{A-B}{C}x_1x_2+$$

$$+\frac{1}{A}\frac{\partial\varepsilon_2^*}{\partial x_1}u_1^{(1)}+\frac{1}{B}\frac{\partial\varepsilon_2^*}{\partial x_2}u_2^{(1)}+\frac{1}{C}\frac{\partial\varepsilon_2^*}{\partial x_3}u_3^{(1)}+$$

$$+\frac{1}{A}\frac{\partial\varepsilon_2^*}{\partial x_1}u_1^{(2)}+\frac{1}{B}\frac{\partial\varepsilon_2^*}{\partial x_2}u_2^{(2)}+\frac{1}{C}\frac{\partial\varepsilon_2^*}{\partial x_3}u_3^{(2)}+$$

$$+\frac{1}{A}\frac{\partial\varepsilon_2^*}{\partial x_1}u_1^{(3)}+\frac{1}{B}\frac{\partial\varepsilon_2^*}{\partial x_2}u_2^{(3)}+\frac{1}{C}\frac{\partial\varepsilon_2^*}{\partial x_3}u_3^{(3)}+\beta_2,$$

$$\varphi_3^*\left(t,x_1,x_2,x_3,u_1^{(1)},u_2^{(1)},u_3^{(1)},u_1^{(2)},u_2^{(2)},u_3^{(2)},u_1^{(3)},u_1^{(3)},u_2^{(3)},u_3^{(3)}\right)=$$

$$=\frac{d}{dt}\varepsilon_3^*\left(t,x_1,x_2,x_3\right)=$$

$$=\frac{\partial\varepsilon_3^*}{\partial x_1}\frac{B-C}{A}x_2x_3+\frac{\partial\varepsilon_3^*}{\partial x_2}\frac{C-A}{B}x_3x_1+\frac{\partial\varepsilon_3^*}{\partial x_3}\frac{A-B}{C}x_1x_2+$$

$$+\frac{1}{A}\frac{\partial\varepsilon_3^*}{\partial x_1}u_1^{(1)}+\frac{1}{B}\frac{\partial\varepsilon_3^*}{\partial x_2}u_2^{(1)}+\frac{1}{C}\frac{\partial\varepsilon_3^*}{\partial x_3}u_3^{(1)}+$$

$$+\frac{1}{A}\frac{\partial\varepsilon_3^*}{\partial x_1}u_1^{(2)}+\frac{1}{B}\frac{\partial\varepsilon_3^*}{\partial x_2}u_2^{(2)}+\frac{1}{C}\frac{\partial\varepsilon_3^*}{\partial x_3}u_3^{(2)}+$$

$$+\frac{1}{A}\frac{\partial\varepsilon_3^*}{\partial x_1}u_1^{(3)}+\frac{1}{B}\frac{\partial\varepsilon_3^*}{\partial x_2}u_2^{(3)}+\frac{1}{C}\frac{\partial\varepsilon_3^*}{\partial x_3}u_3^{(3)}+\beta_3 .$$

Компромиссный набор стратегий в позиции (t,x) определяет управляющие параметры игроков $u^{(1)komp}(t,x), u^{(2)komp}(t,x), u^{(3)komp}(t,x)$ как любое решение системы неравенств

$$\begin{cases}\varphi_{1*}\left(t,x_1,x_2,x_3,u_1^{(2)},u_2^{(2)},u_3^{(2)},u_1^{(3)},u_2^{(3)},u_3^{(3)}\right)\geq 0,\\ если\ \varepsilon_{1*}\left(t,x_1,x_2,x_3\right)<S_{1*}.\end{cases},$$

$$\begin{cases}\varphi_{2*}\left(t,x_1,x_2,x_3,u_1^{(1)},u_2^{(1)},u_3^{(1)},u_1^{(3)},u_2^{(3)},u_3^{(3)}\right)\geq 0,\\ если\ \varepsilon_{2*}\left(t,x_1,x_2,x_3\right)<S_{2*}.\end{cases},$$

$$\begin{cases}\varphi_{3*}\left(t,x_1,x_2,x_3,u_1^{(1)},u_2^{(1)},u_3^{(1)},u_1^{(2)},u_2^{(2)},u_3^{(2)}\right)\geq 0,\\ если\ \varepsilon_{3*}\left(t,x_1,x_2,x_3\right)<S_{3*}.\end{cases},$$

$$\begin{cases}\varphi_1^*\left(t,x_1,x_2,x_3,u_1^{(1)},u_2^{(1)},u_3^{(1)},u_1^{(2)},u_2^{(2)},u_3^{(2)},u_1^{(3)},u_2^{(3)},u_3^{(3)}\right)\geq 0,\\ если\ \varepsilon_1^*\left(t,x_1,x_2,x_3\right)>S_1^*.\end{cases},$$

$$\begin{cases}\varphi_2^*\left(t,x_1,x_2,x_3,u_1^{(1)},u_2^{(1)},u_3^{(1)},u_1^{(2)},u_2^{(2)},u_3^{(2)},u_1^{(3)},u_2^{(3)},u_3^{(3)}\right)\geq 0,\\ если\ \varepsilon_2^*\left(t,x_1,x_2,x_3\right)>S_2^*.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\varphi_3^*\left(t,x_1,x_2,x_3,u_1^{(1)},u_2^{(1)},u_3^{(1)},u_1^{(2)},u_2^{(2)},u_3^{(2)},u_1^{(3)},u_2^{(3)},u_3^{(3)}\right)\geq 0,\\ если\ \varepsilon_3^*\left(t,x_1,x_2,x_3\right)>S_3^*.\end{cases}$$

Пусть начальное положение $(t_0,x_{10},x_{20},x_{30})$ удовлетворяет системе неравенств

$$\varepsilon_{1*}\left(0,x_{10},x_{20},x_{30}\right)=$$
$$=\sqrt{\left(x_{10}-m_1^{(1)}\right)^2+\left(x_{20}-m_2^{(1)}\right)^2+\left(x_{30}-m_3^{(1)}\right)^2}-\alpha_1 T>S_{1*},$$
$$\varepsilon_{2*}\left(0,x_{10},x_{20},x_{30}\right)=$$
$$=\sqrt{\left(x_{10}-m_1^{(2)}\right)^2+\left(x_{20}-m_2^{(2)}\right)^2+\left(x_{30}-m_3^{(2)}\right)^2}-\alpha_2 T>S_{2*},$$
$$\varepsilon_{3*}\left(0,x_{10},x_{20},x_{30}\right)=$$
$$=\sqrt{\left(x_{10}-m_1^{(3)}\right)^2+\left(x_{20}-m_2^{(3)}\right)^2+\left(x_{30}-m_3^{(3)}\right)^2}-\alpha_3 T>S_{3*},$$
$$\varepsilon_1^*\left(0,x_{10},x_{20},x_{30}\right)=$$
$$=\sqrt{\left(x_{10}-m_1^{(1)}\right)^2+\left(x_{20}-m_2^{(1)}\right)^2+\left(x_{30}-m_3^{(1)}\right)^2}-\beta_1 T<S_1^*, \quad (4)$$
$$\varepsilon_2^*\left(0,x_{10},x_{20},x_{30}\right)=$$
$$=\sqrt{\left(x_{10}-m_1^{(2)}\right)^2+\left(x_{20}-m_2^{(2)}\right)^2+\left(x_{30}-m_3^{(2)}\right)^2}-\beta_2 T<S_2^*.$$
$$\varepsilon_3^*\left(0,x_{10},x_{20},x_{30}\right)=$$
$$=\sqrt{\left(x_{10}-m_1^{(3)}\right)^2+\left(x_{20}-m_2^{(3)}\right)^2+\left(x_{30}-m_3^{(3)}\right)^2}-\beta_3 T<S_3^*$$

Тогда в силу теоремы 1 набор стратегий $u^{(1)komp}[\cdot],u^{(2)komp}[\cdot],u^{(3)komp}[\cdot]$ будет компромиссным относительно оценок $S_{1*},S_{2*},S_{3*},S_1^*,S_2^*,S_3^*$. Проиллюстрируем последнее утверждение для случая, когда $A=3,B=2,C=1,T=1,$

$$m_1^{(1)}=1,m_2^{(1)}=0,m_3^{(1)}=0,\ m_1^{(2)}=0,m_2^{(2)}=1,m_3^{(2)}=0,$$
$$m_1^{(3)}=0,m_2^{(3)}=0,m_3^{(3)}=1,$$
$$S_{1*}=0.6,S_{2*}=0.6,S_{3*}=0.6,S_1^*=1.0,S_2^*=1.0,S_3^*=1.0,$$
$$\alpha_1=\frac{1}{4},\alpha_2=\frac{1}{4},\alpha_3=\frac{1}{4},\beta_1=\frac{3}{4},\beta_2=\frac{3}{4},\beta_3=\frac{3}{4}.$$

Длина временного полуинтервала при построении ломаных Эйлера принимается равной $\delta=0.001$. Непосредственно проверяется, что точка $(t_0, x_{10}, x_{20}, x_{30}) = (0,0,0,0)$ удовлетворяет неравенствам (4). Для начальной позиции $(t_0, x_{10}, x_{20}, x_{30}) = (0,0,0,0)$ рассмотрим последовательно следующие ситуации

А) среди игроков нет уклонистов;

Б) первый игрок уклоняется от компромиссного набора, прицеливаясь на свое целевое множество;

В) второй игрок уклоняется от компромиссного набора, прицеливаясь на свое целевое множество;

Г) третий игрок уклоняется от компромиссного набора, прицеливаясь на свое целевое множество.

Управление уклониста выбираем в виде

$$u^{(i)}(t, x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^{3}\left(m_j^{(i)} - x_j\right)^2}} \begin{pmatrix} m_1^{(i)} - x_1 \\ m_2^{(i)} - x_2 \\ m_3^{(i)} - x_3 \end{pmatrix}.$$

Результаты расчетов приведены в таблице. Данные таблицы подтверждают факт принадлежности значения платы i го игрока промежутку $\left[S_{i*}, S_i^*\right], i = 1,2,3$ для компромиссного набора стратегий. При этом уклонение игрока от этого набора не привело к достижению игроком-уклонистом величины платы меньшей, чем его нижняя компромиссная оценка. На рис. 1–4 приведены траектории движения управляемой точки в ситуациях А) – Г) соответственно; малые и большие сферы представляют собой S_{i*} и S_i^* окрестности целевого множества M_i соответственно, $i = 1,2,3$.

	Нижняя компромиссная оценка	Величина платы для компромиссной ситуации	Величина платы при уклонении	Верхняя компромиссная оценка
Первый игрок	0.6	1.000	0.672	1.0
Второй игрок	0.6	1.000	0.707	1.0
Третий игрок	0.6	1.000	0.681	1.0

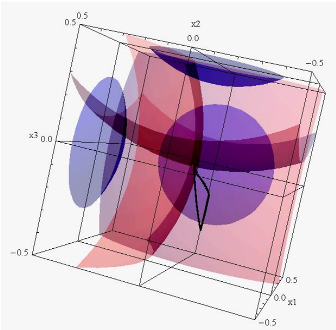

Рис. 1

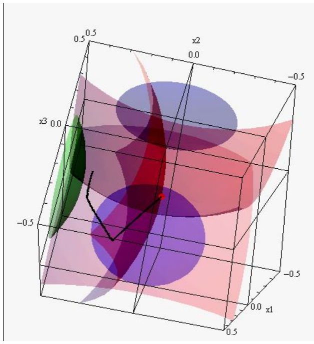

Рис. 2

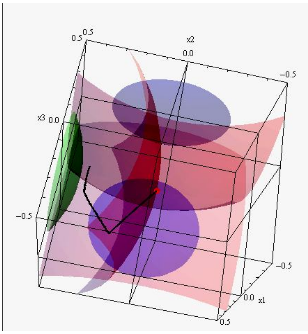

Рис. 3

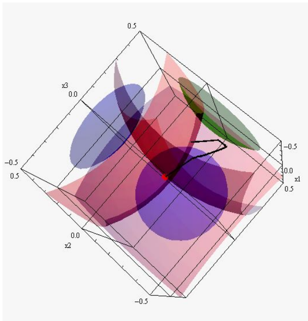

Рис. 4

Библиографический список

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1973. 455 с.

2. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой М.: Наука, 1985. 520 с.

3. *Клейменов А.Ф.* Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург, УрО АН: Наука, 1993. 180 с.

4. *Лутманов С.В.* Гладкие потенциалы в построении компромиссных наборов стратегий в дифференциальных играх нескольких лиц // Вестник Пермского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. Пермь, 2013. Вып. 3(22). С. 43–49.