

УДК 531.57

С.А. Елыгин, С.В. Лутманов

*Пермский государственный национальный
исследовательский университет*

Россия, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15
mpu@psu.ru; (342) 2 396-309

ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВУСТВОЛЬНОГО СТРОИТЕЛЬНОГО Артиллерийского Орудия

Проведена линеаризация дифференциальных уравнений динамики двуствольного строительного артиллерийского орудия в окрестности вертикального закона его движения. Осуществлены численные эксперименты, оценивающие качество выполненной линеаризации. Поставлена задача оптимального управления о возвращении движения установки на базовую траекторию и показана ее эквивалентность задаче приведения фазового вектора линеаризованной системы в начало координат.

Ключевые слова: математическая модель; линеаризованные дифференциальные уравнения; оптимальное управление.

Введение

Начиная с 90-х годов прошлого века в Российской Федерации ведутся научные исследования по созданию математических моделей и конструкций артиллерийских орудий, застреивающих строительные элементы в грунт [1; 4]. Разработанные одноствольные строительные пушки способны погружать сваи с небольшим миделевым сечением в грунт на глубину до 3,8 м.

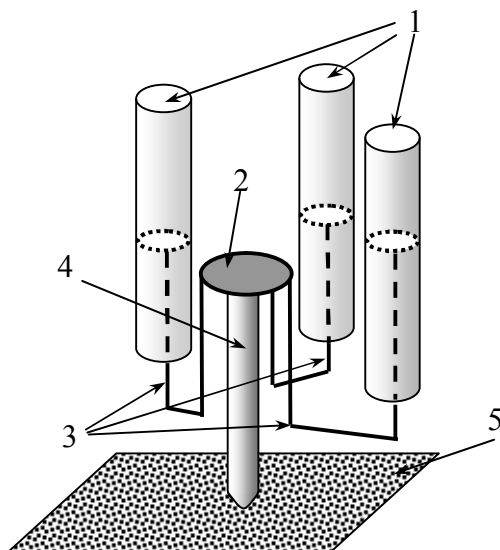


Рис. 1. Принципиальная схема многоствольной строительной артиллерийской системы

Поэтому актуальна задача увеличения проникания застре­ливаемых строительных элементов.

В работах [5; 6] одним из путей решения этой задачи предлагается в качестве погружающей машины использовать многоствольные откатные артиллерийские орудия, принципиальная схема которых приведена на рис. 1.

Работает установка следующим образом. В стволы 1 вставляется фигурный поршень 3 с платформой 2, которая опирается на строительный элемент 4, упирающейся на поверхность грунта 5. Во время выстрела платформа 2 давит на свая 4, в результате свая 4 проникает в грунт 5.

В работе [3] была рассмотрена модель плоского дву­ствольного артиллерийского орудия с пятью степенями свобо­ды. Приведем ее описание.

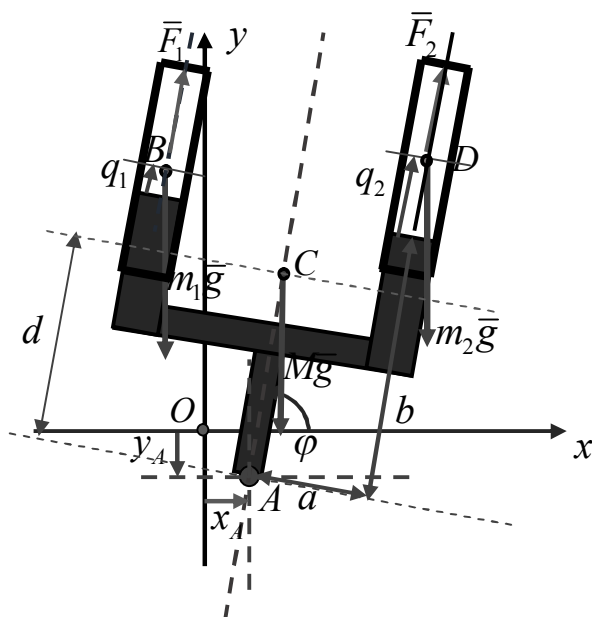


Рис. 2. Принципиальная схема
двуствольного артиллерийского орудия

Поместим двуствольную артиллерийскую систему в декартову систему координат xOy так, как изображено на рис. 2.

Введем следующие обозначения:

m_1, m_2 – масса первого и второго ствола соответственно,

B, D – центры масс стволов,

a – половина ширины поршня-забойника,

b – общая высота поршня-забойника и застреливаемой свай ("вилки"),

L – длина канала ствола (будем предполагать, что длины обоих каналов стволов одинаковы),

C – центр массы "вилки".

Отметим, что рассматриваемая система имеет пять степеней свободы.

Введем следующие обобщенные координаты:

ψ – угол между горизонталью и свайей, при $\varphi = 0$ свая горизонтальна;

q_1 – смещение ствола первой пушки относительно вилки, при $q_1 = 0$ центр масс ствола пушки находится на уровне верхнего конца поршня;

q_2 – смещение ствола второй пушки относительно вилки, при $q_2 = 0$ центр масс ствола пушки находится на уровне верхнего конца поршня;

x_A – смещение нижнего конца сваи по горизонтали от цели, при $x_A = 0$ свая находится над целью;

y_A – смещение сваи по вертикали, при $y_A = 0$ нижний конец сваи находится на поверхности земли.

Силы, возникающие в каналах стволов в результате сжигания заряда, имеют вид

$$F_1 = Sp \left(\frac{l_0}{l_0 + (q_1 - q_{10})} \right)^{1+\theta}, \quad F_2 = Sp \left(\frac{l_0}{l_0 + (q_2 - q_{20})} \right)^{1+\theta}, \quad (1)$$

где S, p, l_0, θ – заданные параметры, а $q_{i0}, i = 1, 2$ – начальные значения обобщенных координат.

1. Модель двухствольного артиллерийского орудия с четырьмя степенями свободы

В настоящей работе предполагается, что к системе дополнительно приложены некоторые управляющие силы \bar{u}_1, \bar{u}_2 , линии действия которых направлены вдоль ствола.

Цель управления состоит в том, чтобы в момент окончания выстрела свая приняла вертикальное положение. Эффективное исследование задачи управления потребовало провести упрощение исходной модели. В частности, ограничиться только четырьмя степенями свободы. Принципиальная схема упрощенной модели приведена на рис. 3.

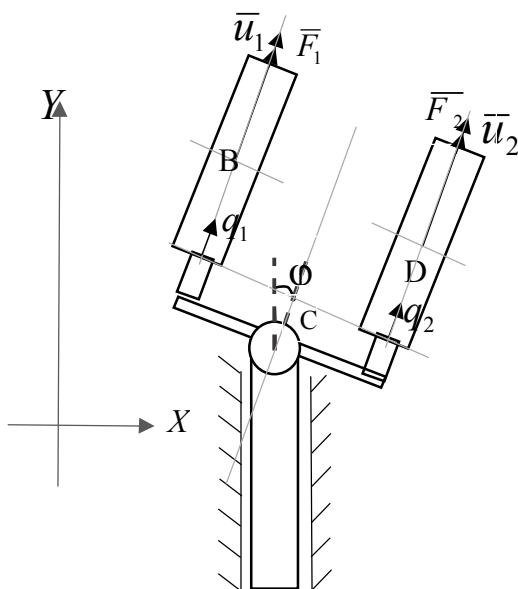


Рис. 3. Принципиальная схема упрощенной модели

Для вывода дифференциальных уравнений движения выразим декартовы координаты центров масс тел, образующих артиллерийскую установку, через обобщенные координаты системы.

Точка **C**: $x_C = d \cos \varphi$, $y_C = y_A + d \sin \varphi$.

Точка **B**: $x_B = (b + q_1) \cos \varphi - a \sin \varphi$,
 $y_B = y_A + (b + q_1) \sin \varphi + a \cos \varphi$.

Точка **D**: $x_D = (b + q_2) \cos \varphi + a \sin \varphi$,
 $y_D = y_A + (b + q_2) \sin \varphi - a \cos \varphi$.

Кинетическая энергия тел, входящих в состав системы, вычисляем в соответствии с теоремой Кенига.

Энергия "вилки":

$$T_c = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} I_c \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} M \left((\dot{y}_a + d\dot{\varphi} \cos \varphi)^2 + (d\dot{\varphi} \sin \varphi)^2 \right)$$

Энергия ствола В:

$$T_B = \frac{1}{2} m_1 v_B^2 + \frac{1}{2} I_B \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} I_B \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_1 \left((\dot{q}_1 \sin \varphi + \dot{y}_a + (b + q_1) \dot{\varphi} \cos \varphi - a\dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{q}_1 \cos \varphi - a\dot{\varphi} \cos \varphi - (b + q_1) \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 \right).$$

Энергия ствола D:

$$T_D = \frac{1}{2} m_2 v_D^2 + \frac{1}{2} I_D \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} I_D \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left((\dot{q}_2 \sin \varphi + \dot{y}_a + (b + q_2) \dot{\varphi} \cos \varphi + a\dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{q}_2 \cos \varphi + a\dot{\varphi} \cos \varphi - (b + q_2) \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 \right).$$

Кинетическая энергия системы равна сумме энергий ее компонент:

$$T = T_c + T_B + T_D = \frac{1}{2} I_c \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} I_B \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} I_D \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} M \left((\dot{y}_a + d\dot{\varphi} \cos \varphi)^2 + (d\dot{\varphi} \sin \varphi)^2 \right) + \frac{1}{2} m_1 \left((\dot{q}_1 \sin \varphi + \dot{y}_a + (b + q_1) \dot{\varphi} \cos \varphi - a\dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{q}_1 \cos \varphi - a\dot{\varphi} \cos \varphi - (b + q_1) \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 \right) + \frac{1}{2} m_2 \left((\dot{q}_2 \sin \varphi + \dot{y}_a + (b + q_2) \dot{\varphi} \cos \varphi + a\dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{q}_2 \cos \varphi + a\dot{\varphi} \cos \varphi - (b + q_2) \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 \right).$$

Обобщенные силы имеют следующий вид.

По координате φ :

$$Q_\varphi = -g \left(Md \cos \varphi + m_1 \left((b + q_1) \cos \varphi - a \sin \varphi \right) + m_2 \left((b + q_2) \cos \varphi + a \sin \varphi \right) \right).$$

По координате q_1 :

$$Q_{q_1} = -m_1 g \sin \varphi + Sp \left(\frac{l_0}{l_0 + (q_1 - q_{10})} \right)^{1+\theta} + u_1.$$

По координате q_2 :

$$Q_{q_2} = -m_2 g \sin \varphi + Sp \left(\frac{l_0}{l_0 + (q_2 - q_{20})} \right)^{1+\theta} + u_2.$$

По координате y_A :

$$Q_{y_A} = -(M + m_1 + m_2) g.$$

Выпишем общий вид уравнений Лагранжа второго рода, образующие математическую модель рассматриваемой артиллерийской установки

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{dT}{d\varphi} &= Q_\varphi, & \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{dT}{dq_1} &= Q_{q_1}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{dT}{dq_2} &= Q_{q_2}, & \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_a} - \frac{dT}{dy_a} &= Q_{y_A}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Дальнейшие аналитические преобразования осуществляются в среде пакета Wolfram Mathematica–8 и ввиду их громоздкости в тексте статьи не приводятся.

Пусть $q = (q_1, q_2, \varphi, y_a)^T$ – вектор обобщенных координат. Разрешим систему уравнений (1.1) относительно старших производных.

В результате получим

$$\ddot{q} = l(t, q, \dot{q}, u), \quad (1.2)$$

где $l(t, q, \dot{q}, u) = \begin{pmatrix} l_1(t, q, \dot{q}, u) \\ l_2(t, q, \dot{q}, u) \\ l_3(t, q, \dot{q}, u) \\ l_4(t, q, \dot{q}, u) \end{pmatrix}$ – четырехмерная вектор-

функция правых частей системы дифференциальных уравнений (1.2), $u = (u_1, u_2)^T$ – вектор управляющих параметров.

Введем новые переменные:

$$\begin{aligned} y_1 &= q_1, y_2 = q_2, y_3 = \varphi, y_4 = y_a, \\ y_5 &= \dot{q}_1, y_6 = \dot{q}_2, y_7 = \dot{\varphi}, y_8 = \dot{y}_a. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Тогда система (1.2) запишется в виде

$$\dot{y} = f(t, y, u), \quad (1.4)$$

где

$$f(t, y, u) = \begin{pmatrix} y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ l_1(t, q, \dot{q}, u)_{(1.3)} \\ l_2(t, q, \dot{q}, u)_{(1.3)} \\ l_3(t, q, \dot{q}, u)_{(1.3)} \\ l_4(t, q, \dot{q}, u)_{(1.3)} \end{pmatrix}^T -$$

– восьмимерная вектор-функция правых частей системы дифференциальных уравнений (1.4),

$$y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8)^T -$$

– восьмимерный фазовый вектор в новых переменных. Символ $l_i(t, q, \dot{q}, u)_{(1.3)}$, $i = 1, 2, 3, 4$ означает, что в выражении $l_i(t, q, \dot{q}, u)$, $i = 1, 2, 3, 4$ произведена замена переменных (1.3).

Таким образом, вместо четырех дифференциальных уравнений второго порядка (1.2) получена система из восьми уравнений первого порядка (1.4).

2. Линеаризация дифференциальных уравнений динамики артиллерийского орудия в окрестности базового закона движения

В качестве базового закона движения принимаем решение системы (1.4) дифференциальных уравнений динамики, полученных в предыдущем пункте, в которых силы $F_1(t), F_2(t), t \in [t_0, T]$ изменяются по заданному закону (1), начальные условия $q_1(t_0) = q_2(t_0) = q_{10} = q_{20}, \varphi(t_0) = 0, y(t_0) = 0$ фиксированы, а управляющие воздействия $u_1(t) \equiv 0, u_2(t) \equiv 0, t \in [t_0, T]$ отсутствуют. Линеаризованные уравнения движения здесь имеют вид:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in R^8, \quad u \in R^2, \quad (2.1)$$

где

$$A(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{y=y^*(t) \\ u=0}}, \quad B(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{y=y^*(t) \\ u=0}}$$

– матрицы размера 8×8 и 8×2 соответственно, а $y = y^*(t), t \in [t_0, T]$ – базовый закон движения.

Для оценки качества линеаризации проведем следующий численный эксперимент. Наряду с начальными условиями (t_0, y_0) , определяющими базовый закон движения артиллерийской системы, рассмотрим возмущенные начальные условия (t_0, \tilde{y}_0) . При этом величину $\|x_0\|$, где $x_0 = \tilde{y}_0 - y_0$ полагаем малой.

Пусть $y = \tilde{y}(t), t \in [t_0, T]$ – решение системы (1.4), отвечающее начальным условиям (t_0, \tilde{y}_0) при нулевых управлениях $u_1(t) \equiv 0, u_2(t) \equiv 0, t \in [t_0, T]$ и $x = x(t), t \in [t_0, T]$ – решение

линеаризованной системы (2.1), отвечающее начальным условиям (t_0, x_0) при нулевых управлениях $u_1(t) \equiv 0, u_2(t) \equiv 0, t \in [t_0, T]$.

Качество линеаризации будем оценивать по критерию

$$I = \frac{\int_{t_0}^T |(\tilde{y}(t) - y^*(t)) - x(t)| dt}{\int_{t_0}^T |\tilde{y}(t) - y^*(t)| dt}. \quad (2.2)$$

3. Численный эксперимент

Приведем данные для численного интегрирования уравнений Лагранжа и дальнейшей проверки корректности проведенной линеаризации.

$a = 1 \text{ м}$ – половина ширины вилки;

$b = 10.5 \text{ м}$ – высота вилки;

$l = 2.345 \text{ м}$ – длина ствола пушки;

$d = 5 \text{ м}$ – расстояние от нижнего конца вилки до центра масс вилки;

$M = 840 \text{ кг}$ – масса вилки;

$m_1 = m_2 = 3600 \text{ кг}$ – массы пушек;

$I_C = \frac{1}{4} M d^2 = 5250 - \text{кг} \cdot \text{м}^2$ – момент инерции вилки относительно своего центра масс;

$I_B = I_D = \frac{1}{12} m l^2 = 1649.71 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ – момент инерции пушки относительно своего центра масс;

$p = 2500000000 \text{ Па}, l_0 = 0,01 \text{ м},$

$S = 0.0227 \text{ м}^2, q_{10} = q_{20} = -\frac{2.345}{2} \text{ м}, \theta = 0.2.$

Время окончания процесса $T = 0.08 \text{ с}.$

Численный эксперимент проведем при нескольких значениях начального угла φ_0 – угла отклонения сваи от вертикали. Выбор этой переменной в вопросе оценки качества линеаризации обусловлен тем, что эталонное положение сваи определяется именно углом отклонения сваи от вертикальной оси.

В таблице приведена зависимость величины критерия (2.2) от начального угла φ_0 .

φ_0	$I_{\text{относительное}}$
-0.18	0.001674244068
-0.16	0.001344966473
-0.14	0.001048512209
-0.12	0.0007863871359
-0.1	0.0003704975145
-0.08	0.0003704975145
-0.06	0.0002190441525
-0.04	0.000106370477
-0.02	0.00003336761854
0.02	$6.81768441 \cdot 10^{-6}$
0.04	0.00005338417042
0.06	0.0001398472787
0.08	0.0002654276461
0.1	0.0004294425862
0.12	0.0006309875481
0.14	0.000868855573
0.16	0.001141776392
0.18	0.001448324269

При анализе результатов выяснилось, что погрешность линеаризации увеличивается с увеличением начального угла отклонения. Для повышения точности линеаризации требуется уменьшение угла отклонения. Заметим, что именно это требование и является целью управления.

4. Постановка задачи оптимального управления двухствольным артиллерийским орудием

В процессе функционирования артиллерийской установки возможно отклонение сваи от вертикали. Тогда возникает необходимость в решении задачи управления о возвращении движения установки на базовую траекторию. При этом качество

управления следует оценивать по некоторым дополнительным критериям. Сформулируем две такие задачи.

Задача 1 (управление по минимуму "энергии"). Среди всех допустимых программных управлений $u[\cdot]$, для которых $\varphi(T) = 0$, определить управление $u^0[\cdot]$, удовлетворяющее условию

$$\left[\int_{t_0}^g \left((u_1^0(\tau))^2 + (u_2^0(\tau))^2 \right) d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\int_{t_0}^g (u_1^2(\tau) + u_2^2(\tau)) d\tau \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Задача 2 (управление по минимуму "силы"). Среди всех допустимых программных управлений $u[\cdot]$, для которых $\varphi(T) = 0$, определить управление $u^0[\cdot]$, удовлетворяющее условию

$$\begin{aligned} \operatorname{vrai} \max_{\tau \in [t_0, T]} \sqrt{(u_1^0(\tau))^2 + (u_2^0(\tau))^2} &\leq \\ &\leq \operatorname{vrai} \max_{\tau \in [t_0, T]} \sqrt{u_1^2(\tau) + u_2^2(\tau)}. \end{aligned}$$

Решение $x(\cdot)$ линеаризованной системы дифференциальных уравнений (2.1) мало отличается от невязки между базовым и возмущенным движениями. Указанный факт позволяет задачу о возвращении движения установки на базовую траекторию свети к задаче приведения решения линеаризованной системы в начало координат.

Таким образом, вместо задач 1, 2 следует решать следующие задачи.

Задача 1а. Среди всех допустимых программных управлений $u[\cdot]$, для которых $x(T) = x(T, t_0, x_0, u(\cdot)) = 0$, определить управление $u^0[\cdot]$, удовлетворяющее условию

$$\left[\int_{t_0}^g \left((u_1^0(\tau))^2 + (u_2^0(\tau))^2 \right) d\tau \right]^{\frac{1}{2}} := \left[\int_{t_0}^g (u_1^2(\tau) + u_2^2(\tau)) d\tau \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Задача 2а. Среди всех допустимых программных управлений $u[\cdot]$, для которых $x(T) = x(T, t_0, x_0, u(\cdot)) = 0$, определить управление $u^0[\cdot]$, удовлетворяющее условию

$$\begin{aligned} \operatorname{vrai} \max_{\tau \in [t_0, T]} \sqrt{(u_1^0(\tau))^2 + (u_2^0(\tau))^2} &\leq \\ &\leq \operatorname{vrai} \max_{\tau \in [t_0, T]} \sqrt{u_1^2(\tau) + u_2^2(\tau)}. \end{aligned}$$

Заметим, что задачи 1а и 2а представляют собой линейные задачи теории оптимального управления. Их решение можно осуществить, например, методом "моментов" [2].

Библиографический список

1. *Бартоломей А.А., Григорьев В.Н., Омельчак И.М., Пенский О.Г.* Основы импульсной технологии устройства фундаментов: монография. Пермь: Изд-во ПГТУ. 2002. 179 с.
2. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
3. *Маланин В.В., Лутманов С.В., Остапенко Е.Н.* Математическая модель двухствольной строительной артиллерийской системы // Вестник Пермского университета: Математика. Механика. Информатика. Пермь, 2014. Вып. 3(26). С. 42–47.
4. *Маланин В.В., Пенский О.Г.* Сопряженные модели динамики импульсно-тепловых машин и проникания недеформируемых тел в сплошную среду: монография. Пермь: Перм. гос. ун-т. 2007. 199 с.
5. *Установка для погружения в грунт строительных элементов* / В.В Маланин, О.Г.Пенский, А.А.Проничев, А.Ю.Ракко: Пат. РФ № 2348757. Опубл. 10.03.2009. Бюл. № 7.
6. *Пенский О.Г., Проничев А.А.* Многоствольная артиллерийская установка для погружения в грунт строительных элементов // Изобретатель. Минск, 2010. № 10(130). С. 15–19.