

УДК 531.3

Е.Л. Тарунин

*Пермский государственный национальный
исследовательский университет*

Россия, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15
8 (342) 2-396-409

**ИНВЕРСИЯ СИЛЫ
КУЛОНОВСКОГО ОТТАЛКИВАНИЯ
ОДНОИМЕННО ЗАРЯЖЕННЫХ ШАРОВ
НА БЛИЗКИХ РАССТОЯНИЯХ**

Известно, что сила взаимодействия заряженных проводников на близких расстояниях существенно отличается от закона Кулона, сформулированного для точечных зарядов. Исследование этого отличия для проводящих сфер было подробно описано в работах [1–3]. Расчеты были выполнены с использованием емкостных коэффициентов, вычисляемых с помощью бесконечных рядов [4]. Для тел цилиндрической формы подобное исследование выполнено в [5] с применением при решении метода сеток задачи Дирихле для потенциала электростатического поля. Расчеты выполнялись для проводящих сфер с использованием вычисляемого потенциала электростатического поля. Основное внимание уделено поиску зависимостей параметров (отношение радиусов сфер и зарядов), при которых происходит смена силы отталкивания одноименно заряженных проводящих сфер на силу притяжения.

Ключевые слова: электростатическое поле; сила отталкивания; притяжение; закон Кулона; уравнение Лапласа для потенциала.

1. Постановка задачи

Счет выполнялся с использованием уравнения Лапласа, записанного в цилиндрической системе координат. Геометрия расчетной области изображена на рис. 1. Расчеты выполнялись с

учетом осевой симметрии, поэтому на рисунке изображено лишь сечение половины области.

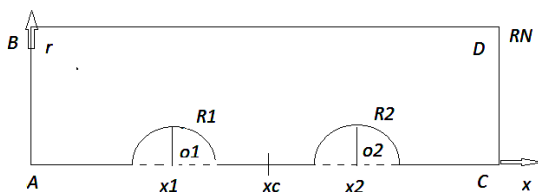


Рис. 1. Геометрия расчетной области

Параметрами задачи являются расстояние между центрами сфер $L=x_2 - x_1$, радиусы сфер R_1, R_2 и заряды на сферах Q_1, Q_2 . Расчеты выполнялись в безразмерных переменных, в качестве единицы расстояния был выбран радиус первого шара $R_1 = 1$. Полагалось, что $R_2 > R_1$. Постановка задачи предполагает, что взаимодействующие заряды изолированы. Положение внешней границы, на которой задавалось нулевое значение потенциала, определялось параметрами метода $\mu > 10$ и R_2 :

$$x_1 = AO_1 = \mu + R_2, \quad O_2C = \mu + R_2, \quad AB = CD = \mu + R_2. \quad (1.1)$$

Уравнение Лапласа для потенциала в цилиндрических координатах x, r с учетом симметрии имело вид

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0. \quad (2.1)$$

В стандартных узлах уравнение аппроксимировалось на квадратной сетке $\Delta r = \Delta x = h$. Соответствующая система уравнений решалась итерационным методом. Особая аппроксимация уравнения (2.1) использовалась на оси и в узлах с нестандартными шаблонами вблизи шаров. Описание этих аппроксимаций дано при описании метода.

При заданных значениях потенциалов на сферах V_{s1} и V_{s2} из решения задачи Дирихле было найдено распределение потенциала. Потенциалы V_{s1} и V_{s2} находились из решения задачи Робена, требующей решения трех задач.

По вычисленным значениям потенциала находились различные характеристики решения: сила электростатического взаимодействия F , зависимости радиальной компоненты поля на

сферах E_r от полярного угла β , отношение максимальной радиальной компоненты поля на сфере к минимальной компоненте η и другие. Основной характеристикой решения являлось отношение вычисленной силы к силе взаимодействия по закону Кулона $kf = F_0 / F$. Так как при смене знака силы электростатического взаимодействия этот коэффициент меняет значение от $+\infty$ до $-\infty$, использовалось обратное значение этого коэффициента $y = F / F_0$.

Постановка задачи позволяла также определить емкость шаров. Согласно электростатике [9] в системе проводников заряды на проводниках связаны с потенциалами на них соотношением

$$q_i = \sum_j c_{i,j} \varphi_j. \quad (3.1)$$

Здесь $c_{i,i}$ – коэффициенты емкости i -го тела, а $c_{i,j}$ – коэффициент электростатической индукции между телами с индексами i, j (этот коэффициент определяет величину заряда q_i , когда потенциал j -го тела равен φ_j , а все остальные проводники заземлены). Для емкостных коэффициентов в формуле (3.1) выполняются соотношения

$$c_{i,i} > 0, \quad c_{i,j} = c_{j,i} < 0 \text{ при } i \neq j. \quad (4.1)$$

В случае двух проводников уравнения (3.1) имеют вид:

$$q_1 = c_{1,1} \cdot \varphi_1 + c_{1,2} \cdot \varphi_2, \quad q_2 = c_{2,1} \cdot \varphi_1 + c_{2,2} \cdot \varphi_2. \quad (5.1)$$

Коэффициенты в этих формулах зависят от радиусов сфер и от расстояния между сферами. При равенстве радиусов $c_{1,1} = c_{2,2}$. При равных знаках потенциалов $\varphi_2 \times \varphi_1 > 0$ реализуется вариант отталкивания одноименных зарядов, а при $\varphi_2 \times \varphi_1 < 0$ реализуется вариант притяжения зарядов разного знака. В случае произвольных значений потенциалов реализуется вариант с любым отношением зарядов

$$\alpha = q_1 / q_2 = \frac{c_{1,1} + c_{1,2}(\varphi_2 / \varphi_1)}{c_{1,2} + c_{2,2}(\varphi_2 / \varphi_1)}. \quad (6.1)$$

Решение сформулированной задачи с потенциалами $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = 0$ и вычисление зарядов позволяет из (5.1) определить коэффициенты

$$c_{1,1} = q_1, \quad c_{1,2} = q_2. \quad (7.1)$$

Вычислительные эксперименты позволили выяснить, что при стремлении расстояния между сферами к бесконечности значения q_2 , $c_{1,2}$ стремятся (как и положено) к нулю, а значения q_1 , $c_{1,1}$ в выбранных единицах измерения стремятся к 4π .

Основными параметрами, определяющими общее число узлов сетки, служили число интервалов на первом радиусе RN и параметр μ , определяющий внешний размер области (см. (1.1)). Максимальное значение индекса *по радиусу* k равнялось NMR , а максимальное значение индекса t равнялось NM . Для хранения всех элементов массива для потенциала $V[k,m]$ требовалось

$$n = RN^2(L + 2(R_2 + \mu))(R_2 + \mu) \quad (8.1)$$

ячеек оперативной памяти. При типичных значениях параметров задачи и метода ($L=3$, $RN=24$, $\mu=20$) число элементов массива для потенциала электростатического поля n более полу-миллиона. При значениях $\mu = RN = 30$ время счета одного варианта около 30 час., при значениях $\mu = RN = 20$ время счета около двух часов, и лишь при малых значениях $\mu = RN = 10$, позволяющих получать лишь грубые результаты, время счета около 5 мин. Расчеты выполнялись на PC с тактовой частотой 1.2 GHz.

2. Метод решения

Аппроксимация уравнения Лапласа (2.1) на квадратной сетке $r_k = k \cdot h$, $x_m = m \cdot h$ в обозначениях школы А.А. Самарского [7] имела вид

$$\frac{1}{r_k} ((r_k + h/2) \cdot V_r - (r_k - h/2) \cdot V_r^-) + V_{x,x}^- = 0. \quad (1.2)$$

Замена $\varphi \rightarrow V$ в (1.2) сделана из методических соображений для отличия разностного решения от точного решения уравнения (2.1). После введения обозначений

$$B1[k] = 1 + 0.5/k, \quad B2[k] = 1 - 0.5/k \quad (2.2)$$

уравнение (1.2) записывалось в виде, удобном для применения итерационного метода

$$V[k, m] = (B1[k] \cdot V[k + 1, m] + B2[k] \cdot V[k - 1, m] + V[k, m + 1] + V[k, m - 1]) / 4. \quad (3.2)$$

Для сокращения объема вычислений значения компонент массивов B1 и B2 вычислялись один раз перед началом итераций.

Система уравнений для потенциала электростатического поля решалась методом последовательной верхней релаксации [7, 8]. Для узлов со стандартным шаблоном параметр верхней релаксации вычислялся по формуле, подобранной экспериментальным путем

$$\omega_* = 2 / (1 + \sin(0.9\pi / NMR)). \quad (4.2)$$

В этой формуле NMR – максимальное значение индекса k по радиусу. Для узлов с нестандартным шаблоном вблизи сфер параметр релаксации равнялся 1 (или был немного больше 1).

Первое слагаемое в уравнении Лапласа (2.1) на оси имеет устранимую неопределенность: ноль, деленный на ноль. Применение к этому слагаемому правила Лопиталя позволяет выяснить, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \right) = 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right) \quad (5.2)$$

и использовать с учетом симметрии аппроксимацию

$$2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right) \rightarrow \frac{4(V_{1,m} - V_{0,m})}{h^2}. \quad (6.2)$$

Окончательная аппроксимация уравнения Лапласа на оси с учетом (6.2) приобретает вид

$$V_{0,m} = (4V_{1,m} + V_{0,m+1} + V_{0,m-1}) / 6. \quad (7.2)$$

Для сокращения общего числа операций значения потенциала на оси $V_{0,m}$ находились методом скалярной прогонки в предположении, что значения потенциала на соседнем слое $V_{1,m}$ известны.

Прогонки осуществлялись для трех участков на оси (перед первой сферой, между сферами и после второй сферы) в предположении, что значения потенциалов на концах участков заданы.

Выпишем конечно-разностную аппроксимацию уравнения Лапласа для не стандартного шаблона, изображенного на рис. 2.

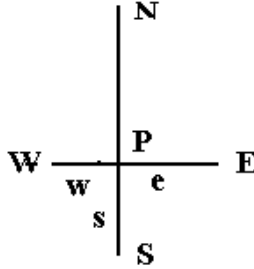


Рис. 2. Обозначения для узла с не стандартным шаблоном

Для обозначения узлов использована географическая символика с заглавными буквами N,E,S,W (N – северный узел, W – западный узел, E – восточный узел, S – южный узел). Соответствующие маленькие буквы обозначают длины плеч в единицах стандартного шага h . Для узлов, расположенных слева от сфер, $w=1$, а для узлов расположенных справа, $e=1$. В использованных обозначениях аппроксимация уравнения Лапласа имела вид:

$$\frac{1}{r_k}((r_k + h/2) \cdot \frac{V_N - V_P}{h} - (r_k - s \cdot h/2) \cdot \frac{V_P - V_S}{s \cdot h}) / (0.5(h + s \cdot h)) + \quad (8.2)$$

$$\frac{1}{0.5(e \cdot h + w \cdot h)} \left(\frac{V_E - V_P}{e \cdot h} - \frac{V_P - V_W}{w \cdot h} \right) = 0.$$

Для использования итерационного метода это уравнение преобразовали так, чтобы можно было вычислять значение V_P через четырех соседей. Длины плеч для не стандартного узла с индексами k , dm вычисляли по формулам (dm – номер индекса, отсчитываемого от соответствующей оси сферы)

$$s = k - \sqrt{RN^2 - dm^2}, \quad w = dm - \sqrt{RN^2 - k^2}. \quad (9.2)$$

Формулы приведены для узлов справа от первой сферы. Подобный вид имеют формулы для второй сферы и для узлов, расположенных слева от сфер.

Наличие нестандартных узлов отражается и на организации циклов по узлам со стандартным шаблоном. В программе вычисляли компоненты четырех векторов $mk1[k]$, $mk2[k]$, $mk3[k]$, $mk4[k]$, которые определяли значения горизонтальных (граничных) индексов по горизонтали m с нестандартным шаблоном. Первые два вектора относятся к первой сфере, а следующие два – ко второй.

Итерации в стандартных узлах выполнены с использованием подпрограммы с именем "CalcV" для пяти областей. Опишем границы этих областей, напомнив, что RN – число интервалов на первом радиусе R_1 , $RN2$ – число интервалов на радиусе R_2 , NMR – граничный узел по вертикали (по радиусу), а NM – максимальны номер узла по горизонтали.

Первая область содержит узлы перед первой сферой, индекс k меняется в ней от 1 до RN , а индекс m от 1 до $mk1[k]-1$.

Вторая область содержит узлы между сферами, индекс k меняется в ней от 1 до RN , а индекс m от $mk2[k]+1$ до $mk3[k]-1$.

Третья область содержит узлы правее второй сферы, индекс k меняется в ней от 1 до $RN2$, а индекс m от $mk4[k]+1$ до $NM-1$.

Четвертая область существует при выполнении неравенства $R_2 > R_1$, индекс k меняется в ней от $RN+1$ до $RN2$, а индекс m от 1 до $mk3[k]-1$.

Пятая область является наибольшей по размеру, индекс k меняется в ней от $RN2+1$ до $NMR-1$, а индекс m – от 1 до $NM-1$.

Компоненты векторов $mk1[k]$, $mk2[k]$, $mk3[k]$, $mk4[k]$ вычисляли перед началом основного счета с помощью алгоритма названного условно "лесенка". В качестве примера опишем алгоритм вычисления компонент вектора $mk2[k]$, предполагая, что нам известно значение $mk2[k-1]$ (при $k=1$, например $mk2[1]=M1+RN$, где $M1$ – индекс m для центра первой сферы). Алгоритм проще объяснить, используя вместо m значение $dm[k]$, равное отклонению индекса от оси сферы (для правой стороны первой сферы $dm[1]=RN$). В цикле по k , начиная с $k=1$, проверяются условия нестандартности узла. Величины плеч уз-

лов пространственной сетки определяются в масштабе длины стандартного узла h . Полагается, что найдено значение $dm[k]$, если одно из плеч узла менее 1, а для узла правее этого узла все плечи равны 1. Для реализации алгоритма требуется вычислить расстояния от узла до поверхности сферы по горизонтали w и по вертикали s . Формулы для вычисления этих значений указаны выше (9.2).

При обработке результатов вычислений требуется вычислять радиальную компоненту поля E_r . Для нестандартного узла вблизи первого шара радиальная компонента поля вычисляется по формулам

$$dr = h\sqrt{k^2 + dm^2} - R_1, \quad E_r = (V[k, m] - Vs_1) / dr. \quad (10.2)$$

Опишем используемую ниже классификацию нестандартных узлов. Назовем узлы с индексами $mk1[k]$, $mk2[k]$, $mk3[k]$, $mk4[k]$ для заданных значений k "граничными" нестандартными узлами (присвоение этим узлам название граничных связано с тем, что рядом с ними слева или справа находится узел со стандартным шаблоном).

Для значений k близких к $k=RN$ есть нестандартные узлы, которые ближе расположены к сфере. Такие узлы будем называть "близнецами". Число "близнецов" при $k < RN$ оценивается по формуле

$$\max dm = trunc(2\sqrt{2 \cdot RN} - \sqrt{2 \cdot RN - 1}). \quad (11.2)$$

При $RN=20$ $\max dm = 2$, а при $RN=100$ $\max dm = 5$. Напомним, что число "близнецов" указывается для узлов, расположенных с одной стороны сферы (общее число "близнецов" вдвое больше). Наибольшее число "близнецов" – при $k=RN$. Они выделены в отдельную группу. Максимальное число "близнецов" при $k=RN$ определяется так:

$$p1 = trunc(\sqrt{2 \cdot RN - 1} + 0.000001). \quad (12.2)$$

Отсюда следует, что при $RN=10$ $p1=4$, а при $RN=20$ $p1=6$.

Перейдем к описанию основных блоков программы.

1. В первом блоке описываются используемые переменные, подпрограммы и задаются значения параметров задачи и метода.

2. Во втором блоке вычисляются параметры нестандартных узлов: индексы граничных нестандартных узлов $dmk1[k]$,

$dmk2[k]$, показывающих удаление узла от оси сфер; длины плеч нестандартных узлов $hwk1[k]$, $hsk1[k]$ для первого шара и $hwk2[k]$, $hsk2[k]$ для второго; $p1$, $p2$ – число нестандартных узлов при $k=RN$ и $k=RN2$; $kd1[k]$, $kd2[k]$ – число "близнецов". Заметим, что часть массивов, упомянутых в этом разделе, относятся лишь к правой стороне сфер. Для левых половин соответствующие значения вычисляются из соображений симметрии.

3. В третьем блоке задаются нулевые значения для потенциала для узлов вне сфер и заданные значения потенциала $Vs1$, $Vs2$ внутри сфер и на их поверхностях. Кроме того, задается нулевое значение для счетчика полных (внешних) итераций $mfull=0$. Полное число внешних итераций (циклов) обычно всегда было менее 200.

4. После сброса в ноль счетчика внутренних итераций $m0$ и значения невязки nev выполнялись итерации по внутренним узлам расчетной области. Вначале вычислялись значения потенциала для узлов с нестандартными шаблонами в следующем порядке: 1) "близнецы"; 2) узлы при $k=RN$ для первого шара и $k=RN2$ для второго шара; 3) счет в граничных нестандартных узлах для обоих шаров с использованием обращения к подпрограммам *CaseLeft*, *CaseRight*; 4) скалярные прогонки для трех участков на оси $r = 0$. Далее осуществлялись итерации по всем узлам со стандартным шаблоном. Эта часть программы была наиболее трудоемкой. В ней использовалось обращение к подпрограмме *CalcV*. Приведем текст этой подпрограммы на языке Паскаль ABC.

```

Procedure CalcV; Begin
  s1 := (B1[k]·V[k+1,m] + B2[k]·V[k-1,m] +
  V[k,m+1] + V[k,m-1]) / 4 - V[k,m];
  V[k,m] := V[k,m] + OM · s1;
  if abs(s1) > nev then nev := abs(s1); end.

```

Величина невязки nev вычислялась также при вычислении в узлах с нестандартными шаблонами. При завершении 4-го блока на 1 увеличивался счетчик внешних итераций $mfull$ и выполнялось сравнение невязки с $eps0=10^{-13}$. Возврат в начало 4-го блока выполнялся при выполнении одного из двух условий –

$m_0 < NM$, $nev > eps_0$. Первое условие сэкономило время счета, сокращая число итераций на первых внешних циклах. Без первого условия общее число внутренних итераций S_{m_0} возросло примерно на 40%. Обычно до $m_{full} \approx 40$ число итераций $m_0 = NM$, а затем убывало до 1. Пример, зависимости числа внутренних итераций m_0 от числа внешних итераций m_{full} указан в табл. 1:

Таблица 1. Пример зависимости числа внутренних итераций m_0 от номера внешних итераций m_{full} при

$$L = 3, \mu = 10, RN = 45, eps = 10^{-13}$$

m_{full}	≤ 30	40	50	60	70	80	≥ 90
m_0	1175	930	279	57	3	2	1

Значения m_0 выводились на экран компьютера с интервалом для внешних итераций, равном 10. Для интегрального анализа сходимости на печать выводились номера полных итераций m_1 , m_2 (m_1 соответствует номеру, при котором впервые $m_0 < NM$, m_2 соответствует номеру, после которого все последующие $m_0 = 1$). Так, например, при значениях $L=3$, $\mu=30$, $RN=24$ полное число итераций $S_{m_0} = 73\,424$, а номера m_1 , m_2 равны соответственно 40 и 102.

Полное число внутренних итераций S_{m_0} возросло при увеличении числа интервалов на первом радиусе RN сильнее линейной зависимости ($S_{m_0} \approx RN^{1.2}$).

Для дополнительного контроля сходимости итерационного процесса через заданное значение числа полных итераций на экран компьютера выводилось также значение суммы SSE

$$SSE(m_{full}) = \sum_{j=0}^{2 \cdot JN1} MEn1[j]. \quad (13.2)$$

Эта величина быстро стабилизировалась. Приведем в качестве примера изменения этой величины при $L=3.5$, $\mu=30$, $RN=24$ через 2 шага. Относительная разница $(SSE(4) - SSE(2))/SSE(2)$ была равна 8.98%, а последующие разницы составляли 1.31% и 0.74%. После 50 внешних итераций не изменялись первые 8 значащих цифр SSE.

5. В этом блоке выполняется обработка результатов решения. Перед вычислением радиальных компонент поля $En1[j]$, $En2[j]$ вначале вычисляются соответствующие углы $Mb1[j]$, $Mb2[j]$ и площади $Mds1[j]$, $Mds2[j]$. По значениям радиальных компонент поля находятся отношения максимальной компоненты поля к минимальной $kE1$, $kE2$. Затем вычисляются заряды на половинках сфер $QR1$, $QR2$, $QL1$, $QL2$ и силы взаимодействия $F11$, $F12$, $F21$, $F22$. В конце обработки результатов расчета на экране строятся зависимости радиальных компонент поля от полярного угла. Завершается программа построением изолиний.

3. Обработка результатов и вычисление интегральных характеристик

По вычисленным значениям потенциала $V[k,m]$ находились следующие характеристики решения – радиальные компоненты поля на сферах $En1[j]$, $En2[j]$, заряды на полусферах $QL1$, $QR1$, $QL2$, $QR2$, полные заряды на сферах - $Q1=QL1+QR1$, $Q2=QL2+QR2$, силы $f11$, $f12, f21, f22$, $F1=f11+f12$, $F2=f21+f22$. Значения $En1[j]$, $En2[j]$ позволяли вычислить как заряды на сферах, так и компоненты сил. Интегральными характеристиками зависимости $En1[j]$ служили три величины – $kE1$ (перепад напряженности на первой сфере), SEn (среднее значение) и $GladEn$ (характеристика гладкости).

$$kE1 = \max_j(En1[j]) / \min_j(En1[j]), \quad SEn = \frac{1}{2 \cdot JN1} \sum_j En1[j]. \quad (1.3)$$

Характеристика гладкости была введена для того, чтобы сравнивать алгоритмы сглаживания. В первых расчетах эффекты негладкой зависимости напряженности от полярного угла β определялись по виду графического изображения функции $En1(\beta)$. Позднее была введена числовая характеристика $GladEn$. Для ее вычисления в цикле по индексу j от 2 до $(2JN1-1)$ суммировались абсолютные значения выхода $En1[j]$ за пределы соседних значений $En1[j-1]$, $En1[j+1]$. Затем в процентах вычислялось окончательное значение

$$GladEn := 100 \times GladEn / SEn / (2JN1 - 1). \quad (2.3)$$

Эта величина не является полноценной характеристикой гладкости, она дает сигнал лишь о явном (существенном) отклонении от гладкости. Эта величина равна нулю, например, при изменении функции в виде лесенки.

Для контроля по вычисленным значениям потенциала проверялась погрешность выполнимости теоремы Гаусса, согласно которой должно быть выполнено равенство

$$\oint_S En \cdot ds = Q1 + Q2. \quad (3.3)$$

Относительное отклонение от выполнимости этого равенства оценивалось по формуле

$$dG = 100 \times (G1 + G2 - Q1 - Q2) / 2 / Q1, \quad (4.3)$$

в которой $G1$, $G2$ – вычисленные значения потоков напряженности поля: $G1$ – поток через торцевые поверхности, $G2$ – поток через боковую поверхность рассматриваемого объема. Эти потоки (интегралы) вычислялись по формуле трапеций с аппроксимацией нормальных компонент напряженности центральными разностями на фиктивных границах, удаленных от внешних границ на 20 узлов пространственной сетки. В типичных расчетах выполнялось неравенство $G2 > 3.5 \cdot G1$; с ростом L и коэффициента μ это отношение увеличивалось. Величина dG зависит от погрешностей вычисления потенциала, потоков $G1$, $G2$ и зарядов $Q1$, $Q2$.

Вычислительные эксперименты позволили выяснить, что основная погрешность dG обусловлена погрешностью вычисления радиальных компонент напряженности поля на сферах $En1[j]$, $En2[j]$. Для уменьшения этой погрешности было испытано несколько вариантов вычисления $En1[j]$, $En2[j]$. В итоге было выяснено, что наименьшая погрешность вычисления $En1[j]$, $En2[j]$ соответствует варианту, в котором значения $En1[j]$, $En2[j]$ вычислялись на поверхности (мысленных) сфер, удаленных от поверхности шаров на расстоянии $ds = p \cdot h$ немного большем шага пространственной сетки h ($p > 1$). Значения потенциалов на этих сферах вычислялись по аппроксимации значений потенциалов по четырем точкам соответствующей стандартной ячейки.

Вычисления с различными значениями $ds = p \cdot h$ были выполнены при $L = 3$, $\mu = 10$, $RN = 10$. Минимальное значение характеристики отклонения от гладкости $GladEn \leq 0.07\%$ было достигнуто при $p = 1.15$ (при $p = 0$ величина $GladEn \approx 0.98\%$, а при $p = 1$ $GladEn = 0.118$).

При вычислении потенциала на радиусе $(R_l + p \cdot h)$ была использована коррекция погрешности вычисления односторонней разностью величин $En2[j]$, $En1[j]$. Эта коррекция осуществлялась умножением полученных значений $En1[j]$, $En2[j]$ на множитель $\rho = 1 + ds/R$. Множитель ρ вычислялся в предположении, что потенциал вблизи сфер близок к потенциалу для уединенной заряженной сферы. Описываемая коррекция снизила (при $L = 3$, $\mu = 10$, $RN = 10$) отклонение от выполнимости теоремы Гаусса до $dG = 0.21\%$, что примерно в 55 раз меньше dG без такой коррекции. Вариант расчетов потенциала на радиусе $(R_l + p \cdot h)$ позволил уменьшить негладкость зависимостей $En1[j]$, $En2[j]$ и, самое главное, снизить на порядок показатель отклонения от выполнимости теоремы Гаусса (типичные значения dG стали менее одного процента для зарядов одного знака, симметрия решения задачи с зарядами разных знаков при $Q1 = -Q2$ приводила к $dG = 0$).

Опишем формулы вычисления углов, площадей, напряженности поля, зарядов и горизонтальной компоненты силы для правой половины первой сферы, полагая, что координаты j -го узла (индекс j введен для нумерации узлов по углу) равны k , dm . Аналогичные формулы используются для левых половин сфер первого и второго шара. При $k < RN$ $j = k$, а при максимальном значении $k = RN$ на сфере учитываются еще соответствующие нестандартные узлы-близнецы. Номер $j = JN1$ соответствует углу $\beta = \pi/2$, а номер $j = 2 * JN1$ соответствует углу $\beta = \pi$. Значения соответствующих полярных углов вычислялись по формуле

$$Mb1[j] = ArcTan(k / dm). \quad (5.3)$$

Полагая, что границы соответствующего элемента площади заключены между углами $b1, b2$:

$$b1 = 0.5 * (Mb1[j] + Mb1[j - 1]), \quad b2 = 0.5 * (Mb1[j] + Mb1[j + 1]), \quad (6.3)$$

вычисляются соответствующие элементы площади (используется формула для шаровых сегментов без площади основания)

$$Mds1[j] = 2 * \pi * R1^2 (\cos(b1) - \cos(b2)) \cdot mhg. \quad (7.3)$$

Расстояние от j -го узла до поверхности сферы

$$drj = h\sqrt{k^2 + dm^2} - R1$$

позволяет приближенно вычислить радиальную компоненту поля

$$MEn1[j] = -\frac{Vs1 - V[k, mk2[j]]}{drj}. \quad (8.3)$$

Характеристиками зависимости $MEn1[j]$ являются перепад напряженности $kE1$ и среднее значение SEn :

$$SEn = \sum_{j=0}^{2*JN1} MEn1[j] / (2 * JN1). \quad (9.3)$$

По вычисленным значениям площадей и напряженности поля вычисляются заряды на элементах поверхности

$$Mdq1[j] = Mds1[j] * MEn1[j]. \quad (10.3)$$

Суммирование значений $Mdq1[j]$ позволяет вычислить заряды на половинках первого шара слева и справа $Q1L, Q1R$.

Горизонтальная компонента силы, действующая на правую половину шара, вычисляется по формуле

$$f12 = 0.5 \sum_{j=0}^{JN1} Mdq1[j] \cdot MEn1[j] \cdot \cos(Mb1[j]). \quad (11.3)$$

Полная сила, действующая на первый шар, равна $F1 = f11 + f12$. Эта сила сравнивается с силой, вычисляемой по закону Кулона $F_0 = Q1 \cdot Q2 / (4\pi L^2)$, с помощью коэффициентов $kf = F_0 / F$, $y = F / F_0$. Значения $kf > 1$ соответствуют ослаблению силы по сравнению с законом Кулона для точечных зарядов, а значения $kf < 1$ соответствуют, наоборот, увеличению силы.

Часть формул, приведенных выше, относится к значениям номера j внутри соответствующего интервала; при значениях $j=0$, $j=JN1$, $j=2JN1$ формулы корректируются очевидным образом.

Кроме вычисления сил по формулам через значения нормальной компоненты поля использовалось вычисление сил по значению производной от потенциальной энергии $F_U = -\partial U / \partial L$.

Расчеты позволили выяснить, что значение силы при $L=3$, вычисленное обычным способом, отличается от использования $F_U = -\partial U / \partial L$ на величину менее 0.01%.

В попытках уточнения решения испытывалось также использование не нулевых значений потенциала на внешней границе, равных

$$V_G = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{Vs1}{r_1} + \frac{Vs2}{r_2} \right). \quad (12.3)$$

В этой формуле r_1 – расстояние от центра первого шара до границы, а r_2 – расстояние от центра второго шара до границы. Использование значений (12.3) на границе внешней области изменило коэффициент kf на величину менее 0.1%. Основные результаты в статье получены при задании на внешней границе нулевого потенциала.

4. Результаты решения

Обсудим вначале решение, полученное при достаточно большом расстоянии между сферами, при котором сила отталкивания незначительно отличается от формулы по закону Кулона.

Изолинии потенциала для этого случая представлены на рис. 3. Параметры решения соответствуют равным зарядам на сферах $Q_1 = Q_2 = 1$, при расстоянии между центрами шаров $L=5$, при радиусе второго шара $R_2 = 2 \cdot R_1$. Решение получено при параметрах метода $RN = \mu = 20$.

Время счета около 2.5 час.; полное число внешних итераций около 138 тыс. Анализ числа итераций на трех этапах метода Робена показал, что больше всего внешних итераций (35.5 %) требуется на втором этапе метода при решении задача с заданным потенциалом на втором шаре. Меньше всего итераций (30.4 %) требует третий этап метода, при котором решается задача с заданными потенциалами V_S1 на первом шаре и V_S2 на втором шаре. В программе вычислялись также другие характеристики сходимости – номера внешних итераций $mf1$, $mf2$ ($mf1$ определяло номер итерации, при котором первый раз число внутренних итераций становится меньше $m0$, $mf2$ определяло первый

номер итерации, при котором число внутренних итераций $m=1$). Соответствующие значения $mf1$, $mf2$ для трех этапов метода таковы: 40, 93; 43, 97; 36, 86 (начальное значение числа внутренних итераций было равно $m0=990$).

Шаг между изолиниями на рис. 3 равнялся одной десятой от максимальной разницы потенциалов. Изображена не вся область решения (левый и правый край отстоят от центров шаров на расстоянии равном трем радиусам). Поэтому в изображенную область не вошла часть изотерм. По картине изолиний и интегральным характеристикам отчетливо видна асимметрия решения относительно середины области. Интегральные характеристики решения таковы: $kf=-1.1257$ ($F_1=-0.00253$, $F_0=0.0268$, $F_2=0.00268$), $kE1= 1.248$ ($\min(E_{n1})=0.0691$, $\max(E_{n1})=0.0862$), $kE2=-7.835$ ($\min(E_{n2})=-0.00327$, $\max(E_{n2})=0.0256$, смена знака напряженности E_{n2} соответствует углу, близкому к 90^0).

В программе вычислялись также емкостные коэффициенты ($c_{11}=13.35$, $c_{12}=-4.66$, $c_{21}=-4.80$, $c_{22}=28.35$), потоки напряженности через границы области ($G_1=0.4636$, $G_2=1.627$) и доли зарядов на левых половинках сфер (Q_{1L} , Q_{2L}) и на правых (Q_{1R} , Q_{2R}) $Q_{1L}=0.524$, $Q_{1R}=0.476$, $Q_{2L}=0.388$, $Q_{2R}=0,612$).

Из анализа интегральных характеристик решения видны признаки погрешности – отклонение от выполнения теоремы Гаусса $dG \approx 4.5\%$ и отклонение от выполнимости третьего закона Ньютона $df = 100 \cdot (F_2 - F_1) / F_0 \approx 4.7\%$.

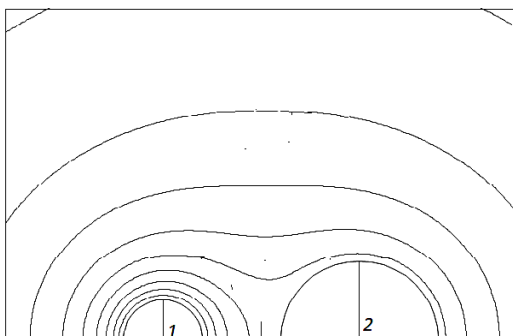


Рис. 3. Изолинии потенциала при $L=5$, $R2=2$

Взаимодействие шаров ослабило напряженность поля в пространстве между шарами. Этот эффект более отчетливо заметен на зависимостях радиальных компонент поля от угла на радиусах сфер. Эти зависимости изображены на рис. 4.

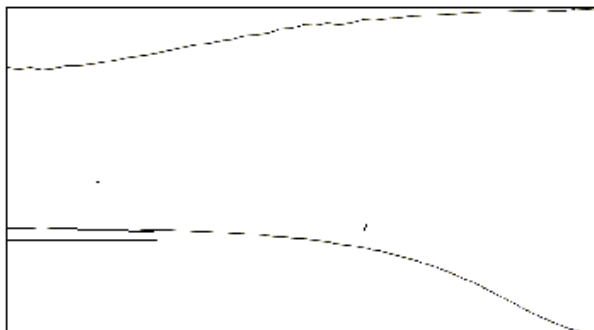


Рис. 4. Зависимости радиальных компонент поля от угла на радиусах сфер

Перейдем к обсуждению результатов, в которых обсуждается эффект смены силы отталкивания на силу притяжения. Основная характеристика силы взаимодействия заряженных сфер дается отношением $kf = F_0/F_1$, в котором $F_0 = Q_1 \cdot Q_2 / 4\pi / L^2$ – сила отталкивания по формуле Кулона для точечных зарядов, а F_1 – сила отталкивания первой сферы, вычисленная в результате расчетов. В дальнейшем изложении вместо величины $kf = F_0/F_1$ будет использоваться обратная величина $y_1 = 1/kf$. Замена отношения сил $kf \rightarrow y_1 = 1/kf$ обусловлена тем, что kf при значении $L = L_*$ обращается в бесконечность, а величина $y_1 = 1/kf = 0$.

Характеристиками погрешности вычисления силы F_1 и коэффициента kf являются: отклонение от выполнимости теоремы Гаусса dG и отличие от выполнимости третьего закона Ньютона $df = abs(F_2 - F_1)$. Для анализа этих величин были выполнены расчеты при фиксированных значениях $R_2 = 2 \cdot R_1$,

$L = 5$ и семи различных значениях параметров метода $z = 1/\mu$, $h = 1/R$ из интервала 0.1 до 1/30. Полученные результаты позволили получить методом наименьших квадратов зависимости

$$\begin{aligned} dG &\approx 90.25 \cdot z - 0.453 \cdot h \\ df &\approx 3.65 \cdot z + 112.3 \cdot h \\ kf &\approx 1.213 + 0.00013 \cdot z + 0.895 \cdot h \end{aligned} \quad (4.1)$$

Отсюда следует, что получение малых погрешностей этих величин требует малых значений z и h , влекущих за собой большие затраты машинного времени. При значениях $z = h = 1/30$ относительная погрешность kf около 1,24%, а время счета более суток.

На рис. 5 приведены изолинии потенциала для расстояния между сферами, равном $L = 3.15$, при котором отталкивание сменилось на притяжение. Значение $y = 0.5012$ для этого случая соответствует притяжению; потенциалы на сферах: $V_{s1} = 0.0912$, $V_{s2} = 0.0614$. Как видно, третья изолиния (при нумерации от первой сферы) весьма близко подходит ко второй сфере с потенциалом V_{s2} .

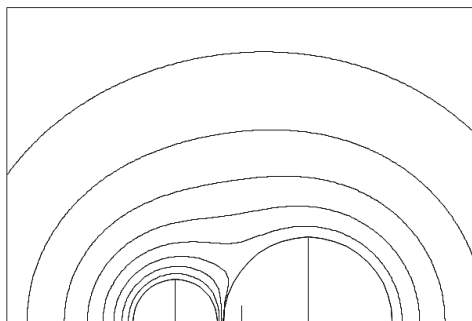


Рис. 5. Изолинии потенциала при $R_2 = 2$, $L = 3.15 < L_*$

Для выяснения характера перестройки потенциала поля при сближении сфер анализировалось поведение потенциала между сферами на оси $r = 0$. При значительном расстоянии между сферами потенциалы убывают при удалении от сфер. Иллюстрацией к этому случаю относится рис. 6, на котором изображена

зависимость потенциала на оси $V[0,j]$. Индекс горизонтального узла j при этом отсчитывается от правого края первой сферы, а максимальное значение этого индекса соответствует левому краю второй сферы. Результат получен при параметрах метода $\mu = 10$, $RN=20$.

В соответствии с граничными условиями максимальное значение потенциала равно потенциалу на первой сфере V_{s1} , на правом краю потенциал равен потенциалу на второй сфере V_{s2} . Как видно, потенциал убывает при удалении от обеих сфер и достигает минимума на расстоянии $xm \approx 3.1$ от правого края первой сферы (напомним, что расстояние между краями сфер равно $dL = L - R_2 - R_1 = 8 - 2 - 1 = 5$). Минимальное значение потенциала составляет ≈ 65.1 % от V_{s2} . При уменьшении расстояния между сферами минимальное значение потенциала увеличивается, достигает значения V_{s2} при $L \approx 5$. Дальнейшее уменьшение расстояния между сферами приводит к линейной зависимости потенциала от V_{s2} до V_{s1} (уже при $L = 4$ отличие от линейной зависимости незначительно).

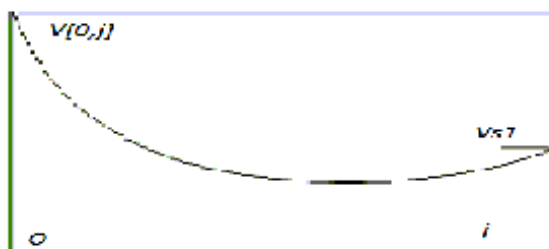


Рис. 6. Потенциал между сферами на оси ($r=0$) при $L = 8$, $R_2 = 2$

Основной целью исследования является выяснение зависимости критического расстояния между сферами L_* от отношения радиусов. Поэтому вначале были выполнены вычислительные эксперименты (ВЭ), в которых L_* определялось при фиксированном отношении радиусов $R_2/R_1 = 4$ и различных значениях параметров метода $h = 1/RN$, $z = 1/\mu$. В этих ВЭ

расчеты выполнялись для различных значений L так, чтобы обеспечить попадание значения корня $y_1 = 1/kf = 0$ в интервал длиной $\Delta L = 0.1$. В найденном интервале левое значение величины y_L было положительным, а правое значение y_R было отрицательным. Значение корня L_* определялось в предположении линейной зависимости $y(L)$ на найденном интервале. Результаты этих ВЭ представлены в табл. 2. Положительные значения $y_L > 0$ в этой таблице относятся к значению $L = 6.5$, а отрицательные значения ($y_R < 0$) соответствуют $L = 6.6$, величина $z(j) = 1/\mu_j$.

Таблица 2. Результаты ВЭ при $R_2 = 4$

j	$h(j)$	$z(j)$	y_L	$-y_R$	$L_*(j)$
1	1/30	0.05	0.01663	0.0557	6.523
2	0.1	0.05	0.07006	0.00281	6.596
3	0.05	0.05	0.01874	0.02848	6.539
4	1/30	1/30	0.01191	0.0649	6.516
5	1/16	1/40	0.02494	0.04753	6.534

Результаты, представленные в табл. 2, были обработаны методом наименьших квадратов. Поиск параметров зависимости в виде ($z = 1/\mu$)

$$L_*(z, h) = \bar{L}_* + c_1 \cdot z + c_2 \cdot h \quad (4.1)$$

дал следующие значения $\bar{L}_* = 6.504$, $c_1 = 0.00041$, $c_2 = 0.7677$. Отсюда следует, что относительные погрешности определения L_* , вычисленные по формуле $\delta_j = 100 \cdot (L_*(j) - \bar{L}_*) / \bar{L}_*$, менее 1% при значениях параметров метода $z = h = 1/30$. Расчеты показывают, что при больших отношениях радиусов коэффициент c_1 в погрешности (4.1) выше, что требует большего значения параметра μ . Отметим, что относительная погрешность отношения сил $y_1 = 1/kf = F_1 / F_0$ также при значениях $z = h = 1/30$ выше (около 2,4%).

Отметим еще одну особенность расчетов, связанную с погрешностью, ведущей к отклонению от третьего закона Ньютона ($F_1 + F_2 \neq 0$). Это отклонение естественно убывает при $\mu \rightarrow \infty$ и

$h \rightarrow 0$, что требует увеличения объема вычислений. Проще всего оценить влияние этой погрешности, вычисляя критические значения L_* , дающие корни двух уравнений $y_1(L) = F_1/F_0 = 0$, $y_2(L) = F_2/F_0 = 0$. Результаты соответствующих вычислительных экспериментов показали, что относительная разница корней этих уравнений менее 0,2%. Поэтому дальнейшие расчеты выполнялись в предположении, что корень уравнения $y_1(L) = 0$ и определяет критическое значение L_* .

Примеры зависимости отношения сил $y_1(L) = 1/kf = F_1/F_0$ от расстояния между центрами сфер L для трех отношений радиусов представлены на рис. 7. Соответствующие зависимости построены по результатам, полученным при параметрах метода $\mu = 30$, $RN=20$. Часть этих данных представлена в табл. 3, 4, 5. Из графика и таблиц видно, что при $L \rightarrow \infty$ отношение сил $y_1 = F_1/F_0$ стремится к 1. Кроме того, видно, что зависимость $y_1(L)$ различна слева от корня при $L < L_*$ и справа от корня при $L > L_*$. Вид этих зависимостей может быть использован для поиска корня функции $y_1(L)$. Так как не удалось найти простых зависимостей для этих ветвей, значение корня L_* , как правило, находилось по корню линейной функции $y_1(L)$, построенной по двум найденным значениям, для которых $y_L > 0$, $y_R < 0$.

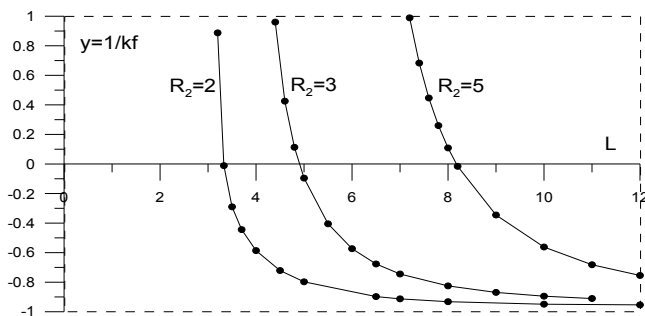


Рис. 7. Зависимости $y_1(L)$ для трех значений радиуса второй сферы $R_2 = 2, 3, 5$

Таблица 3. Значения $y_1(L)$ для отношения радиусов $R_2 = 2$

L	3.2	3.3	3.5	3.7	4.0	4.5	5.0	5.5	6.5
y_1	0.887	-0.0112	-0.290	-0.444	-0.586	-0.721	-0.797	-0.815	-0.898

Табл. 4. Значения $y_1(L)$ для отношения радиусов $R_2 = 3$

L	4.4	4.6	4.8	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	8.0	10.0
y_1	0.960	0.425	0.113	-0.095	-0.405	-0.573	-0.677	-0.745	-0.825	-0.895

Табл. 5. Значения $y_1(L)$ для отношения радиусов $R_2 = 5$

L	7.2	7.4	7.6	7.8	8.0	8.2	9.0	10.0	11.0	12.0
y_1	0.989	0.683	0.497	0.260	0.109	-0.0157	-0.345	-0.562	-0.682	-0.755

Для получения зависимости $L_*(R_2)$ были выполнены расчеты, в которых определялось значение L_* при различных значениях радиуса второй сферы из интервала от 1.5 до 10. Соответствующие результаты, полученные при параметрах метода $\mu = RN = 20$, представлены в табл. 6.

Табл. 6. Значения корня функции $y_1(L)$ при различных значениях R_2

R_2	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	5.0	5.5
L_*	2.705	3,295	4.97	4.90	7.565	8.163	8.175	8.99
R_2	6.0	7.0	8.0	10.0				
L_*	9.813	13,836	14.8	19.62				

Из приведенной таблицы видно, что значения L_* растут при увеличении отношения радиусов. Поиск зависимости $L_*(R_2)$ выполнялся для двух функций следующего вида

$$L_*(R_2) \approx f_1(R_2) = (1 + R_2) \cdot (A(R_2 - R_0) + B(R_2 - R_0)^2) \quad (2.4)$$

$$dL_*(R_2) = L_8 - (1 + R_2) = f_2(R_2) = C \cdot (1 - \exp(-\beta \cdot (R_2 + \Delta R))). \quad (3.4)$$

В обеих формулах три подгоночных параметра. Качество этих формул будем оценивать по асимптотическим свойствам при больших значениях отношения радиусов R_2 и по средней сумме

квадратов невязок
$$S_i/n = (\sum (f_i(R_2(k)) - L_*(k))^2)/n \quad (4.4)$$

Анализ данных, представленных в табл. 6, выделяет область значений R_2 от 3.5 до 6, которым соответствуют уменьшенные значения L_* . Будем называть условно эту область "областью провала". Причины появления этой области до конца не выяснены. Заметим лишь, что при малых значениях параметров метода $\mu = RN = 10$ соответствующий провал не заметен.

Анализ результатов показывает, что при малых значениях отношения радиусов $R_2 \leq 3$ хороша аппроксимация простой функцией

$$f_0(R_2) = k \cdot (1 + R_2) \cdot (R_2 - R_0) \quad (5.4)$$

Формула имеет лишь два параметра: коэффициент k и минимальное значение радиуса второго шара R_0 . Процесс минимизации соответствующей суммы квадратов невязок S дал следующие значения $k = 0.103$, $R_0 = 1.00$, $S = 0.07$. Значение $R_0 = 1.00$ отчетливо показывает, что инверсия закона Кулона проявляется при $R_2 > R_1$. Аппроксимация (5.4) была выполнена для результатов, указанных в табл. 6, а также для результатов, полученных при параметрах метода $\mu = RN = 10$. Коэффициент k во втором случае получился в 1.35 раза меньше, что свидетельствует о большой погрешности результатов, полученных при параметрах метода $\mu = RN = 10$.

Перейдем к обсуждению аппроксимаций f_1, f_2 . Эти функции имеют по три подгоночных параметра. Предполагалось, что они смогут описать зависимость на большем интервале значений R_2 по сравнению с формулой (5.4), предназначенной для описания зависимости $L_*(R_2)$ лишь при малых значениях отношения радиусов сфер.

Анализ вычислительных экспериментов привел к тому, что первая аппроксимация (2.4) была отвергнута. Назовем причины отказа от этой аппроксимации. Ожидалось, что значение параметра R_0 будет близко к 1, а оно оказалось значительно меньше 1. Кроме того, получающиеся отрицательные значения параметра B приводят к тому, что при достаточно больших зна-

чениях R_2 , функция $f_1(R_2)$ описывает уменьшение критического расстояния L_* , что противоречит расчетам.

Опишем результаты по минимизации суммы квадратов невязок для второй функции с ожидаемым свойством экспоненциального насыщения

$$\lim f_2(R_2) \text{ при } R_2 \rightarrow \infty \text{ равен } C. \quad (6.4)$$

Использование метода градиентного спуска для минимизации суммы квадратов невязок привел к функции

$$dL_*(R_2) \approx 29.7 \cdot (1 - 0.03527 \cdot (R_2 - 1)). \quad (7.4)$$

Среднее значение суммы квадратов невязок для этой функции $S/n=1.495$. Эту величину логично сравнивать со средним значением данных $(\sum dL_{*j})/n \approx 3.49$. Итерации по методу градиентного спуска продолжались до тех пока 30 000 шагов спуска не меняли третьи значащие цифры у параметров и суммы квадратов невязок. Указанные параметры функции получены для данных табл. 6 при исключении из нее данных, относящихся к провалу при R_2 от 3,5 до 6 (при этом число точек n равнялось 7). Отметим также, что при задании параметра $\Delta R = 0$ сумма квадратов невязок увеличивается в 2,6 раза, а при задании $\Delta R = +1$ увеличивается примерно в 19 раз. Полученное значение асимптотического значения $C \approx 28$ позволяет понять – почему расчеты, выполненные при $R_2 \leq 12$, не обнаруживали четких признаков насыщения.

Выводы

1. Вычислительные эксперименты позволили выяснить, что смена знака силы взаимодействия одноименно заряженных сфер с равными зарядами происходит лишь для сфер с различным радиусами.
2. Показано, что критическое расстояние между сферами L_* , при котором происходит смена знака силы, монотонно увеличивается с ростом отношения радиусов R_2 . При $R_2 \leq 3$ зависимость $L_*(R_2)$ близка к линейной функции.

3. Получена приближенная зависимость $L_*(R_2)$ со свойством асимптотического насыщения $\lim dL_*(R_2) \rightarrow \text{const} = C$ при $R_2 \rightarrow \infty$. Эта зависимость требует уточнения, но она дает ориентиры для дальнейших расчетов. Полученное значение $C \approx 28$ позволяет понять, почему расчеты, выполненные при $R_2 \leq 12$, не обнаруживали отчетливых признаков насыщения.

4. Найдены зависимости, облегчающие выяснения параметров метода, которые обеспечат повышенную точность расчетов.

Библиографический список

1. *Саранин В.А.* О взаимодействии двух электрически заряженных шаров // Успехи физических наук. 1999. Т. 169. С. 453–458.

2. *Саранин В.А., Мейер В.В.* Теоретические и экспериментальные исследования взаимодействия двух проводящих заряженных шаров // Успехи физических наук. 2010. Т. 180, № 10. С. 1009–1117.

3. *Saranin V.A.* Energy, force and field strength in a system of two charged conducting balls // Journal of Electrostatics, 71 (2013). P. 746–753.

4. *Smythe W.R.* Static and Dynamics Electricity // McCraw–Hill, New York, 1950.

5. *Тарунин Е.Л.* Электростатическое взаимодействие заряженных проводников на близких расстояниях // Вестник Пермского университета. Серия Физика, 2013. Вып. 2(24). С. 49–56.

6. *Davis M.H.* Two charged spherical conductors in a uniform electric field: forces and field strength // Q.J. Mech. Appl. Math. 17 (1964). P. 499–511.

7. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.

8. *Тарунин Е.Л.* Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции // Иркутск: Иркут. ун-т, 1990. 226 с.

9. *Физический энциклопедический словарь.* М.: Советская энциклопедия, 1960. Т. 5.