ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ
Нелинейные динамические системы

Вып. 47 **Межвузовский сборник научных трудов** **2015**

УДК 531.355

Н.Н. Макеев
Институт проблем точной механики и управления РАН
Россия, 410028, Саратов, ул. Рабочая, 24
nmakeyev@mail.ru; (845) 272-35-33

ПЕРМАНЕНТНЫЕ ВРАЩЕНИЯ ГИРОСТАТА В НЕКОНСЕРВАТИВНОМ СВЕТОВОМ ПОЛЕ

Рассматривается движение относительно центра масс гиростата с постоянным гиростатическим моментом в непотенциальном поле сил светового давления. С основой гиростата неизменно связан светоотражающий экран (солнечный стабилизатор) с постоянными термомеханическими и оптическими характеристиками, на который падает однородный световой поток, порождающий движущий силовой момент. Определено геометрическое многообразие осей перманентного вращения гиростата в конфигурационном пространстве. Получены необходимое условие устойчивости перманентных вращений и область их существования.

Введение

Источники света в разреженной или вакуумной средах вызывают эффект *светового давления* (СД) на твёрдые тела. Это явление обусловлено свойством светового потока, порождающим моментно-силовое воздействие на эти тела как результат влияния *поля сил светового давления* (СД-поля). Динамические свойства этого поля являются предметом исследования *радиационной механики* [1].

В настоящей статье в основу динамической модели взаимодействия светового потока с твердой поверхностью положена термомеханическая схема, принятая в работе [2]. Эта схема учитывает реально существующий эффект переизлучения (в тепловом диапазоне) мощности, поглощаемой твердой поверхностью. Как утверждается [2], в ряде случаев эффект переизлучения не является пренебрежимо малым: сила отдачи тепловых фотонов неконсервативна и порождает дополнительное динамическое воздействие.

1. Основные положения

Рассматривается движение в СД-поле свободного от связей гиростата с заданным постоянным результирующим гиростатическим моментом. Гиростат движется так, что его неизменяемая основа (*тело-носитель*) движется вокруг его центра масс C. С телом-носителем гиростата неизменно связан *светоотражающий экран* (солнечный стабилизатор) в виде тонкой недеформируемой оболочки неизменной конфигурации с заданными постоянными термомеханическими и оптическими параметрами. На экран падает однородный световой поток в виде пучка параллельных световых лучей.

Введём правые координатные ортобазисы с общим началом в полюсе C: базис Z ($Cz_1z_2z_3$), неизменно связанный с инерциальным пространством, и базис X ($Cx_1x_2x_3$), оси которого направлены по главным в полюсе C направлениям тензора инерции гиростата.

Пусть $\mathbf{s}$ (s_1, s_2, s_3) − *гелиоцентрический орт*, устанавливающий ориентацию светового потока относительно базиса Z, неизменный в этом базисе. Этот вектор является *направляющим ортом* светового потока, ориентированным против направления его световых лучей.

Согласно принятой модели силовой момент СД-поля может быть представлен в виде [2−4]

$$\mathbf{L}^F = Q(s_3)\mathbf{f} + m_3\dot{\mathbf{f}}, \tag{1}$$

где обозначено

$$Q(s_3) = m_1 + m_2 s_3, \qquad \mathbf{f} = [-s_2, s_1, 0]^T.$$

Здесь m_1, m_2, m_3 − заданные постоянные величины, зависящие от теплофизических и оптических характеристик экрана стабилизатора (*термомеханические параметры*). При этом величина m_3 выполняет роль *параметра лучевой диссипации*, в силу чего компонента силового момента (1), содержащая этот параметр, не является консервативной, в отличие от первой аддитивной компоненты. Это можно показать, используя известные приёмы [5].

Обозначим: $\mathbf{A} = diag(A_1, A_2, A_3)$ − матрица тензора инерции гиростата в полюсе C; $\boldsymbol{\omega}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ − абсолютная угловая скорость носителя гиростата; $\mathbf{k}(k_1, k_2, k_3)$ − постоянный гиростатический момент, заданный в базисе X.

Движение гиростата в однородном параллельном СД-поле рассматривается на основе термомеханической модели взаимодействия светового потока с твёрдой поверхностью, учитывающей эффект переизлучения (в тепловом диапазоне) мощности, поглощаемой твёрдой поверхностью экрана [2]. Этой модели соответствует динамическая система

$$\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}) + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}) = \mathbf{L}^F, \tag{2}$$

где результирующий вектор $\mathbf{L}^F$ определяется равенством (1).

В проекциях на оси координатного ортобазиса X согласно соотношениям (1), (2) и уравнений Пуассона–Эйлера получаем

$$\begin{gathered}
A_1\dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2)\omega_2\omega_3 + k_3\omega_2 - k_2\omega_3 = -\,Q(s_3)s_2 - \\
-\,m_3(\omega_1 s_3 - \omega_3 s_1), \\
A_2\dot{\omega}_2 + (A_1 - A_3)\,\omega_3\omega_1 + k_1\omega_3 - k_3\omega_1 = Q(s_3)s_1 + \\
+\,m_3(\omega_3 s_2 - \omega_2 s_3), \\
A_3\dot{\omega}_3 + (A_2 - A_1)\,\omega_1\omega_2 + k_2\omega_1 - k_1\omega_2 = 0, \\
\dot{s}_1 = \omega_3 s_2 - \omega_2 s_3 \qquad (1,\,2,\,3).
\end{gathered} \tag{3}$$

Система уравнений (3) обладает тривиальным первым интегралом

$$\|\mathbf{s}\|^2 = 1. \tag{4}$$

2. Постановка задачи

Система уравнений (3) является многочастотной эволюционной динамической системой, определённой в конечной открытой области фазового пространства $\mathbf{R}^6$.

Ставится следующая задача: определить геометрическое многообразие осей *перманентных вращений* (ПВ) гиростата в конфигурационном пространстве, а также необходимое условие их устойчивости по Ляпунову и области существования как области изменения параметра ω – величины скорости ПВ.

3. Геометрия осей перманентного вращения

Из многообразия возможных движений гиростата, определяемых системой уравнений (3), выделим множество движений вида

$$\omega_j(t) = \omega_j^0, \quad s_j(t) = s_j^0 \quad (j = 1, 2, 3), \tag{5}$$

где (ω_j^0, s_j^0) − известные постоянные. Множество состояний (5) является перманентными вращениями, для которых

$$\omega_j^0 = \omega s_j^0 \qquad (j = 1, 2, 3), \tag{6}$$

где $\omega = const \neq 0$ − скорость ПВ. При этом случаи $\omega > 0$, $\omega < 0$ соответствуют "прямому" и "обратному" ПВ. В дальнейшем (если иное не оговорено) полагается $\omega > 0$; верхний нулевой индекс всюду опущен.

Рассмотрим геометрические свойства осей ПВ в случае, при котором все параметры A_j различны. Обозначим

$$a_1 = (A_3 - A_2)\omega^2 + m_2, \quad a_2 = (A_1 - A_3)\omega^2 - m_2,$$
$$a_3 = (A_2 - A_1)\omega^2, \qquad b_3 = \omega k_3 + m_1,$$
$$b_j = \omega k_j \qquad (j = 1, 2, 3)$$

и введем числовые множители λ_j (j = 1, 2, 3), которые могут принимать значения, соответственно

$$[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3] = [(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)]. \tag{7}$$

Из уравнений системы (3) в силу условий (5), (6) следует

$$\mathbf{K}(\mathbf{s}) \equiv \sum_{j=1}^{3} (\lambda_j a_j s_{j+1} s_{j+2} + c_j s_j) = 0, \tag{8}$$

где обозначено

$$c_j = \lambda_{j+2} b_{j+1} - \lambda_{j+1} b_{j+2} \qquad (j = 1, 2), \tag{9}$$

$$c_3 = -(\lambda_1 b_2 + \lambda_2 b_1).$$

В равенствах (8), (9) значения индекса не должны превышать числа $r = 3$; в противном случае из данного значения следует вычесть число r. При соответствующих фиксированных значениях параметров λ_j согласно представлениям (7) получаем равенства, непосредственно следующие из уравнений системы (3) при условиях (5), (6).

Уравнение (8) определяет трехпараметрическое множество осей ПВ гиростата в СД-поле; оно параметризовано совокупностью величины ω и любых двух из набора величин λ_j ($j = 1, 2, 3$). При каждом фиксированном значении параметра ω уравнение (8) устанавливает в пространстве координат s_j (**s**-пространстве) поверхность второго порядка, связанную с носителем гиростата. Точка этой поверхности − *апекс* $N(s_1, s_2, s_3)$ − является точкой ее пересечения с осью ПВ. Одновременно апекс находится и на сфере (4).

Множеством возможных траекторий апекса N является множество точек взаимного пересечения поверхностей (4), (8) − сферическая кривая $S(s_j)$, определяющая многообразие осей ПВ. Существование данного множества обусловлено тем, что уравнения (4), (8) однозначно не определяют положение оси ПВ относительно координатного ортобазиса X.

Характерная поверхность (8), согласно [6], классифицируется следующим образом. Введем геометрические инварианты

$$I_1 = \prod_{j=1}^{3} \lambda_j a_j, \quad I_2 = Tr\ \mathbf{K}, \quad I_3 = -\sum_{j=1}^{3} (\lambda_j a_j)^2, \tag{10}$$

$$I = \det \mathbf{K}(\mathbf{s}).$$

Обозначим

$$D_1 = \beta_1 - \beta_2 - \beta_3, \quad D_2 = -\beta_1 + \beta_2 - \beta_3, \; D_3 = -\beta_1 - \beta_2 + \beta_3,$$

где $\beta_j = \lambda_j a_j c_j$ $(j = 1, 2, 3)$. Тогда в силу представления (8) имеем

$$I = \sum_{j=1}^{3} \beta_j D_j. \tag{11}$$

Инварианты (10), (11) полностью определяют тип несущей поверхности (8). При $I_1 \neq 0$ эта поверхность является центральной поверхностью второго порядка; в этом случае должно быть $\lambda_j a_j \neq 0$. При этом для $I < 0$ имеем двуполостный гиперболоид; при $I > 0$ − однополостный гиперболоид. Если $I = 0$, то эта поверхность − действительный конус второго порядка.

В случае, при котором $I_1 = 0$, $I_3 < 0$, имеет место один из следующих вариантов. Если $I > 0$, то получаем гиперболический параболоид, а при $I = 0$, $I_3 < 0$ − гиперболический цилиндр.

Если выполняется *условие распадения* цилиндра

$$\sum_{j=1}^{3} \lambda_j a_j c_{j+1} c_{j+2} = 0,$$

то данная поверхность в **s**-пространстве представляется двумя действительными плоскостями.

Каждая из поверхностей (8) определяет множество возможных траекторий апекса *N*, соответствующих множеству кинематически возможных осей ПВ гиростата. Из этого множества осей динамически возможными являются только те, для которых выполняется соотношение, выражающее равенство результирующего гироскопического момента гиростата главному вектору момента сил СД-поля. При этом динамически возможные оси ПВ могут соответствовать как устойчивому, так и неустойчивому ПВ.

Из соотношения (8) при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1$ получаем равенство, согласно которому при $\omega \neq 0$, $(A_1 - A_2) s_1 s_2 \neq 0$ имеем

$$\omega = (A_2 - A_1)^{-1} u(s_1 - s_2), \tag{12}$$

где обозначено

$u(s_1, s_2) = \dfrac{k_1}{s_1} - \dfrac{k_2}{s_2}$ − *гиростатическая функция,* тождественно обращающаяся в нуль для твердого тела.

Исключая из уравнений, получаемых согласно соотношению (8) при $(\lambda_1, \lambda_2) = [(1, 0), (0, 1)]$, в силу зависимости (12) имеем, соответственно

$$\begin{aligned}(A_3 - A_2)u^2 s_2 s_3 + (A_2 - A_1)u(k_3 s_2 - k_2 s_3) + \\ + (A_2 - A_1)^2 Q(s_3) s_2 = 0,\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}(A_1 - A_3)u^2 s_3 s_1 + (A_2 - A_1)u(k_1 s_3 - k_3 s_1) - \\ - (A_2 - A_1)^2 Q(s_3) s_1 = 0, \qquad u = u(s_1, s_2).\end{aligned}$$

Система равенств (13) соответствует геометрическому объекту, определяющему в **s**-пространстве *многообразие осей ПВ* носителя гиростата.

Сфера (4) и несущая поверхность (8) ***s***-пространства имеют общие точки $N_1(\pm 1, 0, 0)$, $N_2(0, \pm 1, 0)$, $N_3(0, 0, \pm 1)$; при этом каждой точке N_j соответствует значение $c_j = 0$ $(j = 1, 2, 3)$. Эти точки расположены на сферической траектории S (s_j) апекса и определяют главные оси инерции гиростата. Согласно соотношению (12) в точках N_j $(j = 1, 2, 3)$ имеем $\omega = \infty$, в силу чего главные оси инерции гиростата в общем случае не являются осями его ПВ.

4. Необходимое условие устойчивости перманентных вращений

Исследуем устойчивость ПВ гиростата, принимая состояние (5) за невозмущенное. Введем векторы возмущений **p** (p_j), **q** (q_j), определенные в малой окрестности состояния (5), и положим в возмущенном движении

$$\boldsymbol{\omega}^* = \omega \mathbf{s} + \mathbf{p}, \quad \mathbf{s}^* = \mathbf{s} + \mathbf{q}. \tag{14}$$

Обозначим $\mathbf{X} = [p_j, q_j]^T$ $(j = 1, 2, 3)$; $\mathbf{A} = [a_{rs}]$ − матрица с элементами a_{rs} $((r, s) = 1, \ldots, 6)$.

Система уравнений возмущённого движения гиростата, линеаризованная по p_j, q_j согласно соотношениям (3), (14) в малой окрестности состояния (5), имеет вид

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}, \tag{15}$$

где обозначено

$$(a_{14}, a_{25}) = (A_1^{-1}, A_2^{-1})\, m_3 \omega s_3,$$

$$(a_{15}, a_{24}) = (-A_1^{-1}, A_2^{-1})\, Q(s_3), \quad a_{pp} = -A_p^{-1} m_3 s_3,$$

$$a_{3p} = A_3^{-1}[(A_1 - A_2)\omega s_{3-p} + (-1)^p k_{3-p}],$$

$$a_{p6} = A_p^{-1}[(-1)^p m_2 s_{3-p} - m_3 \omega s_p] \quad (p = 1, 2),$$

$$a_{12}(s_3) = A_1^{-1}[(A_2 - A_3)\omega s_3 - k_3],$$

$$a_{21}(s_3) = A_2^{-1}[(A_3 - A_1)\omega s_3 + k_3],$$

$$a_{13} = A_1^{-1}[(A_2 - A_3)\omega s_2 + m_3 s_1 + k_2],$$

$$a_{23} = A_2^{-1}[(A_3 - A_1)\omega s_1 + m_3 s_2 - k_1],$$

$$a_{51} = -a_{42} = 1, \quad a_{45} = -a_{54} = \omega.$$

Остальные элементы матрицы **A** равны нулю.

Рассмотрим ПВ гиростата вокруг оси Cx_3, при котором

$$s_1 = s_2 = 0, \quad s_3 = 1, \quad k_1 = k_2 = 0, \quad k_3 \neq 0. \tag{16}$$

Характеристическое уравнение системы возмущённого движения (15) вида $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E} = 0$ ($\mathbf{E}$ − единичная матрица), составленное при условиях (16), имеет вид

$$\lambda^2 \sum_{k=0}^{4} w_{4-k}\, \lambda^k = 0, \tag{17}$$

где обозначено

$$w_0 = 1, \quad w_1 = m_3 P, \quad P = A_1^{-1} + A_2^{-1},$$

$$w_2 = PQ(1) + m_3^2 R + \omega^2 - g_{12} g_{21}, \quad Q(1) = m_1 + m_2,$$

$$w_3 = m_3 R[2Q(1) + \omega F(\omega)], \quad R = (A_1 A_2)^{-1}, \tag{18}$$

$$w_4 = R[Q^2(1) + Q(1)\omega F(\omega)] - g_{12} g_{21} \omega^2,$$

$$F(\omega) = (2A_3 - A_1 - A_2)\omega + 2k_3,$$

$$g_{12} = a_{12}(1), \quad g_{21} = a_{21}(1).$$

Уравнение (17) имеет кратные нулевые корни, наличие которых показывает, что начальное возмущение кинетического момента гиростата сохраняется постоянным.

Согласно критерию Рауса–Гурвица для устойчивости ПВ (5) необходимо, чтобы коэффициенты уравнения (17) удовлетворяли системе условий

$$w_j > 0 \qquad (j = 1, \dots, 4), \tag{19}$$

$$w_1 w_2 w_3 - w_3^2 - w_1^2 w_4 > 0. \tag{20}$$

При этом условие (20) в силу ограничений (19) сводится к неравенству

$$w_1 w_2 - w_3 > 0. \tag{21}$$

Условия (19), (21) согласно выражениям (18) принимают вид, соответственно

$$m_3 > 0, \tag{22}$$

$$m_3^2 + (A_1 + A_2)(m_1 + m_2) + A_1 A_2 \omega^2 - f_1(\omega) f_2(\omega) > 0, \tag{23}$$

$$2(m_1 + m_2) + \omega F(\omega) > 0, \tag{24}$$

$$(m_1 + m_2)^2 + (m_1 + m_2)\omega F(\omega) - \omega^2 f_1(\omega) f_2(\omega) > 0, \tag{25}$$

$$\begin{gathered}(A_1^2 + A_2^2)(m_1 + m_2) + (A_1 + A_2)[m_3^2 + A_1 A_2 \omega^2 - \\ - f_1(\omega) f_2(\omega)] > A_1 A_2 \omega F(\omega).\end{gathered} \tag{26}$$

Здесь обозначено

$$F(\omega) = f_2(\omega) - f_1(\omega), \tag{27}$$

$$f_1(\omega) = (A_2 - A_3)\omega - k_3, \quad f_2(\omega) = (A_3 - A_1)\omega + k_3.$$

Система ограничений (22)−(26) выражает *необходимое условие устойчивости* ПВ гиростата (5) в СД-поле для позиции (16), соответствующей ПВ вокруг его главной центральной оси инерции Cx_3.

5. Области устойчивости перманентных вращений

Система соотношений (22)−(26) содержит совместные ограничения, в которые входит параметр ω, связанный с компонентами s_1, s_2 зависимостью (12). Под областями устойчивости ПВ гиростата здесь понимаются интервалы изменения значений параметра ω, при которых его ПВ являются устойчивыми.

Условие (22), наложенное на *параметр лучевой диссипации* m_3, определяется теплофизическими и оптическими характеристиками материала светоотражающего экрана и заведомо выполняется, если внешняя поверхность экрана является выпуклой поверхностью вращения, для которой $n_0 > n_1$ с точностью до малой аддитивной величины порядка $O(h)$ [2]. Здесь n_0, n_1 – коэффициенты черноты внешней и внутренней поверхностей экрана, h − величина толщины его оболочки. Ограничение (22), полученное для ПВ гиростата, совпадает с соответствующим условием устойчивости для ПВ твердого тела, совершаемых в СД-поле [2], и определяет *положительную диссипацию* (термин [7]), устанавливаемую зависимостью (1).

Если внешняя поверхность светоотражающего экрана является прямым круговым усеченным конусом с центром масс, расположенным выше его вершины, то значения термомеханических параметров m_1, m_2 положительны [2]. В силу этого для дальнейшего принимается условие

$$m_1 + m_2 > 0. \tag{28}$$

Принятие этого условия позволяет упростить вид ограничений подсистемы (23)−(26).

Действительно, согласно (28) условия (23)−(26) заведомо выполняются, если имеют место усиленные ограничения

$$f_1(\omega) f_2(\omega) < 0, \tag{29}$$

$$\omega F(\omega) > 0, \tag{30}$$

где величины f_1, f_2, F определяются равенствами (27). Можно показать, что ограничение (30) имеет место лишь при условии

$$k_3 \omega > 0. \tag{31}$$

Ограничение (31) содержится также в условии устойчивости консервативной гиростатической системы в СД-поле [4, с. 53].

Для дальнейшего примем

$$(A_1 - A_3)(A_2 - A_3)k_3 \neq 0.$$

Полагая для определенности $A_1 > A_2 > A_3$, из условия (29) получаем следующие два случая.

1. При $k_3 > 0$ имеем

$$\omega > (A_2 - A_3)^{-1} k_3 > 0, \tag{32}$$

а при $k_3 < 0$ находим

$$\omega > (A_1 - A_3)^{-1} k_3. \tag{33}$$

2. Если $k_3 > 0$, то

$$\omega < (A_1 - A_3)^{-1} k_3 , \tag{34}$$

а если $k_3 < 0$, то

$$\omega < (A_2 - A_3)^{-1} k_3 < 0. \tag{35}$$

Таким образом, в случаях, для которых выполняются условия (32), (35), имеют место "прямые" и "обратные" (в смысле направления вращения) ПВ, соответственно. Если выполняются условия (33), (34), то могут реализовываться как "прямые", так и "обратные" ПВ.

Согласно условию (30) "прямые" ПВ гиростата имеют место в диапазоне значений скорости

$$0 < \omega < M, \tag{36}$$

а "обратные" ПВ − в полосе

$$M < \omega < 0, \tag{37}$$

где обозначено $M = 2(A_1 + A_2 - 2A_3)^{-1} k_3$.

Итак, условия (32), (36) и (35), (37) определяют следующие диапазоны реализации устойчивых ПВ гиростата, соответственно: "прямых"

$$(A_2 - A_3)^{-1} k_3 < \omega < M, \quad k_3 > 0 \tag{38}$$

и "обратных" $M < \omega < (A_2 - A_3)^{-1} k_3 , \quad k_3 < 0.$ (39)

Таким образом, областью устойчивых ПВ гиростата в СД-поле, устанавливаемой множеством значений параметра ω, является объединение двух открытых интервалов, определяемых неравенствами (38), (39), соответствующими значениям $\omega > 0$ и $\omega < 0$. Эти интервалы расположены на оси значений величины ω симметрично относительно положения статического равновесия носителя гиростата.

Для твердого тела ($\mathbf{k} = 0$) согласно условию (29) устойчивые ПВ в позиции (16) имеют место для любых значений параметра ω при выполнении какого-либо из условий

$$A_3 > \max\ (A_1, A_2), \quad A_3 < \min\ (A_1, A_2).$$

В случае твердого тела условие (30) не рассматривается в силу ограничения (31).

Заключение

Необходимое условие устойчивости ПВ гиростата в СД-поле с учётом ее лучевой диссипативной компоненты было получено в работе [4, с. 55] на основе критерия Льенара–Шипара [8]. Это условие зависит от некоторого аддитивного параметра, величину которого следует определять в каждом конкретном случае. Введение данного параметра позволяет расширить параметрическое многообразие возможных устойчивых ПВ гиростата.

В настоящей работе получена другая форма необходимого условия устойчивости ПВ, построенная на основе условий Рауса–Гурвица. Эти условия позволяют получить необходимое, но не достаточное условие устойчивости ПВ гиростата, поскольку характеристическое уравнение (17) содержит кратные нулевые корни.

Условие устойчивости (22) совпадает с соответствующими условиями позиции (16) в СД-поле как для гиростата [4, с. 56], так и для твердого тела [2, с. 319]. Условие противоположного смысла, $m_3 < 0$, соответствует неустойчивому ПВ для гиростата [4] и для твердого тела [2].

Характерно, что условия устойчивости (24), (25) не зависят явно от лучевого диссипативного параметра m_3, а неравенства (23), (26) при переходе к случаю консервативного СД-поля ослабляются.

Аналогично тому, как это было рассмотрено в позиции (16), можно исследовать устойчивость ПВ гиростата и для других его позиций.

Библиографический список

1. *Джуманалиев Н.Д., Киселёв М.И.* Введение в прикладную радиационную небесную механику. Фрунзе: Илим, 1986. 201 с.

2. *Коган А.Ю., Кирсанова Т.С.* Термомеханические явления в движении относительно центра масс космического аппарата // Космич. исслед. 1992. Т. 30, вып. 3. С. 312−320.

3. *Макеев Н.Н.* Угловое движение симметричного космического аппарата с солнечным стабилизатором // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы / Перм. ун-т. Пермь, 1996. С. 105−112.

4. *Макеев Н.Н.* Устойчивость стационарных движений гиростата в световом потоке // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы / Перм. ун-т. Пермь, 2000. Вып. 32. С. 51−62.

5. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.

6. *Моденов П.С.* Аналитическая геометрия. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1967. 697 с.

7. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.

8. *Джури Э.* Инноры и устойчивость динамических систем. М.: Наука, 1979. 300 с.