ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ
Нелинейные динамические системы

Вып. 47 **Межвузовский сборник научных трудов** **2015**

УДК 531.381

Н.Н. Макеев
Институт проблем точной механики и управления РАН
Россия, 410028, Саратов, ул. Рабочая, 24
nmakeyev@mail.ru; (845) 272-35-33

ДВИЖЕНИЕ ГИРОСТАТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ОРТОГОНАЛЬНОГО СИЛОВОГО МОМЕНТА

Рассматривается движение относительно центра масс свободного гиростата с постоянным гиростатическим моментом, движущегося под воздействием нестационарного результирующего силового момента, ортогонального векторам кинетического момента и угловой скорости носителя гиростата. Выполнено преобразование динамической системы к приведенной системе гиростата, движущегося по инерции. Методом малого параметра определён характер инерционного движения гиростата по углам Эйлера "в малом", при котором его геометрия масс близка к конфигурации объекта с центральной (шаровой) кинетической симметрией.

Введение

В динамике твёрдых тел рассматриваются движения, для которых уравнения движения, происходящего в *режиме авторегулирования* (по Р. Граммелю [1]), приводимы к уравнениям движения объекта, движущегося по инерции (**L**-приводимы). Это приведение достигается введением специальной *униформизующей переменной* [2] − некоторого гипотетического времени. При этом модуль результирующего вектор-момента внешних сил, действующих на механический объект, может являться заданной произвольной непрерывной и однозначной функцией времени, а сам вектор-момент при этом должен сохранять неизменным заданное направление в инерциальном пространстве. Вместе с тем, этот силовой момент в каждый момент времени должен, определённым образом, ориентирован относительно вектора кинетического момента объекта **G**: он должен быть либо коллинеарен вектору **G** [3], либо ортогонален ему [4]. Такого рода ориентирование данного вектора может быть осуществлено посредством функционирования определённой *сервосвязи* [5], реализуемой системой программируемых *сервомеханизмов* [6].

Механический объект, движущийся в указанном режиме и подчинённый соответствующей приведенной динамической системе с гипотетическим временем, совершает по отношению к вектору **G** свободное движение по инерции: твердое тело – эйлерово движение, а гиростат − движение по Н. Жуковскому–В. Вольтерра [7; 8]. При этом для данного динамического режима эволюции движения в приведённом времени являются отличными от эволюций для указанного инерционного движения в режиме натурального времени [4].

В настоящей статье рассматривается задача **L**-приведения динамической системы гиростата, движущегося в режиме авторегулирования под воздействием силового момента, ортогонального вектору его кинетического момента. Аналогичная задача для свободного твёрдого тела рассмотрена в работе [4].

1. Основные предпосылки

Свободный от связей гиростат с заданным постоянным гиростатическим моментом движется относительно центра масс так, что его неизменяемая основа (*тело-носитель*) движется вокруг полюса C.

Введём правые координатные ортобазисы с общим началом в полюсе C: неподвижный базис Z ($Cz_1z_2z_3$), неизменно связанный с инерциальным пространством, и подвижный базис X ($Cx_1x_2x_3$), оси которого направлены по главным в полюсе C направлениям тензора инерции гиростата.

Обозначим: $\mathbf{A} = \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3)$ − матрица тензора инерции гиростата в полюсе C; $\boldsymbol{\omega}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ − абсолютная угловая скорость носителя гиростата; $\mathbf{k}(k_1, k_2, k_3)$ − постоянный гиростатический момент относительно полюса C, заданный в базисе X. На гиростат действует заданный силовой вектор-момент $\mathbf{L}(t)$, являющийся функцией класса C°, определенной для натурального времени $t \in T = [0, +\infty)$.

Согласно принятым предпосылкам движение гиростата для $t \in T$ определяется динамической системой

$$\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}) + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}) = \mathbf{L}(t). \tag{1}$$

Состояние гиростата, подчинённое уравнению (1), является *движением в режиме авторегулирования по Р. Граммелю* [1]. Динамическое уравнение (1) может быть представлено в виде

$$\dot{\mathbf{G}} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G}) = \mathbf{L}(t), \tag{2}$$

где $\mathbf{G} = \mathbf{A}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k}$ – кинетический момент гиростата, отнесенный к полюсу C.

Полагая для дальнейшего

$$\mathbf{L} \neq (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G}) = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega}),$$

потребуем, чтобы движение гиростата для значений $t \in T$ происходило при ограничениях

$$\mathbf{G}(t) \bullet \mathbf{L}(t) = 0, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\omega}(t) \bullet \mathbf{L}(t) = 0. \tag{4}$$

Условия (3), (4) выражают ортогональность векторов $\mathbf{G}$, $\boldsymbol{\omega}$ результирующему вектор-моменту $\mathbf{L}$ в любой момент времени $t \in T$. Соотношения (3), (4) являются независимыми первыми интегралами уравнения (2), представляемыми, соответственно, в виде

$$\|\mathbf{G}\|^2 \equiv \sum_{j=1}^{3} (A_j \omega_j + k_j)^2 = H^2, \tag{5}$$

$$(\boldsymbol{\omega}^T \bullet \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) \equiv \sum_{j=1}^{3} A_j \omega_j^2 = h. \tag{6}$$

Здесь H, $h > 0$ − постоянные интегрирования.

Интеграл (5), выражающий инвариантность нормы вектора кинетического момента гиростата, порожден группой симметрий. Квазиэнергетический интеграл (6) отражает свойство гироскопичности моментно-силового воздействия на гиростат.

2. Постановка задачи

Величины $\mathbf{G}(t)$, $\mathbf{L}(t)$, содержащиеся в эволюционном уравнении (2), − заданные действительные вектор-функции. При этом вектор-функция $\mathbf{L}(t)$ определена в $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$, удовлетворяет условиям существования, единственности и непрерывной зависимости от начальных значений решений задачи Коши для данного уравнения. Постулируется, что рассматриваемая задача однозначно разрешима в замкнутой ограниченной выпуклой области данного пространства.

Ставится задача: выполнить приведение уравнения (2), для которого моментно-силовой фактор $\mathbf{L}(t)$ обладает свойствами (3), (4) в пространстве квазикоординат ω_j, t, к виду, характеризующему в пространстве ω_j, τ (j = 1, 2, 3) движение гиростата по инерции ($\mathbf{L}$-приведение). □

Иначе, требуется показать, что для динамической системы (2) при условиях (3), (4) имеет место гомеоморфизм вида (ω_j, t) ↔ (ω_j, τ) (j = 1, 2, 3), где τ – некоторое гипотетическое время.

Аналогичная задача для твёрдого тела рассматривалась в работе [4].

3. L-приведение динамической системы

В силу условий (3), (4) вектор $\mathbf{G}$ ортогонален плоскости, в которой расположены векторы $\mathbf{G}$, $\boldsymbol{\omega}$, отнесённые к полюсу C. Согласно этому положим

$$\mathbf{L}(t) = L(t)\mathbf{e}_L, \qquad \mathbf{e}_L = \left|\mathbf{Q}(t)\right|^{-1}\mathbf{Q}(t). \tag{7}$$

В силу интеграла (6) имеем

$$\left|\mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega})\right|^2 = (\omega H)^2 - F(\boldsymbol{\omega}), \tag{8}$$

где обозначено $\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2,$

$$F(\boldsymbol{\omega}) = h^2 + 2h(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{k}) + (\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{k})^2.$$

Для случая твёрдого тела (при $\mathbf{k} = 0$) соотношение (8) упрощается [4].

Согласно равенствам (7), (8) уравнение (2) приводится к виду

$$\dot{\mathbf{G}} + [1 - \left|\mathbf{Q}\right|^{-1} L\,(t)]\mathbf{Q} = 0. \tag{9}$$

Переходя в уравнении (9) к новой независимой переменной τ по формуле

$$\tau = \int_0^t [1 - \left|\mathbf{Q}\right|^{-1} L\,(s)]\, d s, \tag{10}$$

приведем уравнение (9) к виду

$$\mathbf{G}' + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G}) = 0. \tag{11}$$

Здесь и всюду далее штрих обозначает дифференцирование по переменной τ, определяемой соотношением (10).

Приведённое уравнение (11) эквивалентно следующей скалярной системе уравнений [7]

$$A_1\,\omega_1' + (A_3 - A_2)\,\omega_2\omega_3 + k_3\omega_2 - k_2\omega_3 = 0 \quad (1, 2, 3). \tag{12}$$

Уравнение (11), эквивалентная ему система (12), а также интегралы (5), (6), показывают, что в пространстве переменных G_j, τ (j = 1, 2, 3) носитель гиростата совершает по отношению к вектору **G** движение, геометрически идентичное движению свободного гиростата, совершаемому в пространстве переменных G_j, t в случае, аналогичном классическому случаю Эйлера для твёрдого тела [9]. В силу этого величина τ, соответствующая зависимости $\tau\,(t)$ (10), является для данного уравнения *униформизующей переменной*, заданной на интервале $\tau \in [0, +\infty)$.

Аналитическое решение системы уравнений (12) известно [10, с. 89]. Оно представляется в параметрической форме с параметром ϑ

$$\omega_j = \omega_j\ (\vartheta) \quad (j = 1, 2, 3), \quad \tau = \tau\,(\vartheta),$$

где зависимость от τ выражена через эллиптический интеграл первого рода. В силу этого величина $\left|\mathbf{Q}\,(\boldsymbol{\omega})\right|$, введенная равенством (8) и содержащаяся в соотношении (10), является принципиально определенной.

Если ввести дополнительное ограничение − линейную *сервосвязь* вида

$$(\boldsymbol{\omega} \bullet \mathbf{k}) = m, \qquad (13)$$

где m − заданная постоянная, то соотношение (8) упрощается и принимает вид

$$\left|\mathbf{Q}\,(\boldsymbol{\omega})\right|^2 = (\omega H)^2 - D, \qquad (14)$$

где обозначено $\qquad D = h^2 + (2h + m)m.$

Зависимость (14) имеет формально такой же вид, как и соответствующее соотношение для случая твёрдого тела [4], при котором $\mathbf{k} = 0$.

Кинематическая связь (13) может быть реализована посредством сервомеханизмов, воздействие которых приводит к состояниям, совместимым с условиями (3), (4). В силу условия (13) проекция вектора $\boldsymbol{\omega}$ на ось с направляющим вектором $\mathbf{k}$ для $t \in T$ постоянна. В частности, при ортогональности ненулевых векторов $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{k}$ имеем $m = 0$; справедливо и обратное. В этом случае $F\,(\boldsymbol{\omega}) = h^2 = const$ и зависимость (8) для гиростата формально идентична соответствующей зависимости, относящейся к твёрдому телу.

4. Движение гиростата с геометрией масс, близкой к шаровой симметрии

Рассмотрим движение гиростата в пространстве переменных G_j, τ (j = 1, 2, 3), происходящее согласно уравнению (11). Ориентация координатного базиса X относительно базиса Z определяется углами Эйлера θ, φ, ψ $(0 < \theta < \pi)$, построенными по схеме [5]. В силу сохранения вектор-момента $\mathbf{G}$ (G_j) согласно динамической системе (11) направим координатную ось Cz_3 по вектору $\mathbf{G}$, орт которого $\mathbf{s}$ (s_j) в осях базиса X представлен координатами

$$(s_1, s_2, s_3) = (\sin\theta \sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \cos\theta). \qquad (15)$$

Полагая $G_j = Gs_j$ (j = 1, 2, 3), в силу соотношений (15) и кинематических уравнений Эйлера получаем следующую систему уравнений [11]

$$\begin{gathered}
\theta' = (a_1 - a_2)G\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi - I_1(\varphi), \\
\varphi' = [a_3 - I_2(\varphi)]G\cos\theta + I_3(\varphi)\operatorname{ctg}\theta - B_3, \qquad (16) \\
\psi' = I_2(\varphi)G - I_3(\varphi)(\sin\theta)^{-1}.
\end{gathered}$$

В системе уравнений (16) обозначено

$$I_1(\varphi) = B_1 \cos\varphi - B_2 \sin\varphi, \quad I_2(\varphi) = a_1 \sin^2\varphi + a_2 \cos^2\varphi,$$

$$I_3(\varphi) = B_1 \sin\varphi + B_2 \cos\varphi,$$

$$a_j = A_j^{-1}, \qquad B_j = a_j k_j \quad (j = 1, 2, 3).$$

Из уравнений системы (16) следует, что при условиях

$$a_1 = a_2 = a, \qquad B_1 = B_2 = 0 \tag{17}$$

носитель гиростата совершает *регулярную прецессию* относительно орта **s** со скоростями $\dot\psi = \Omega,\ \dot\varphi = \omega,$ где

$$\Omega = aG, \qquad \omega = (a_3 - a)G\cos\theta_0 - B_3,$$

причём θ_0 – нутационный угол прецессии.

Условия (17) определяют осевую кинетическую симметрию гиростата относительно главной центральной оси Cx_3.

Рассмотрим случай движения гиростата, определяемый системой уравнений (16), при котором геометрия распределения его массы близка к центральной структурно-динамической симметрии. В связи с этим положим

$$A_j = J + \mu J_j \qquad (j = 1, 2, 3), \tag{18}$$

где J_j − некоторые присоединенные моменты инерции, μ − безразмерный малый параметр $(0 < \mu << 1)$.

Согласно равенствам (18) имеем

$$a_j = J^{-1}(1 - \mu b_j) \quad (b_j = J^{-1} J_j, \quad j = 1, 2, 3). \tag{19}$$

Здесь постоянные b_j (j = 1, 2, 3) играют роль параметров эксцентриситета.

Введём векторы **b** (b_1, b_2), **n** $(k_1 \sin\varphi, k_2 \cos\varphi)$, **e** (1, 1), вектор углов Эйлера $\mathbf{\Phi}(\theta, \varphi, \psi)$ и обозначим

$$P(\varphi) = b_1 \sin^2\varphi + b_2 \cos^2\varphi, \quad Q_1(\varphi) = (\mathbf{b} \bullet \mathbf{n}), \quad N_1(\varphi) = (\mathbf{e} \bullet \mathbf{n}),$$

$$[Q_2(\varphi),\ N_2(\varphi)] = \frac{\partial}{\partial\varphi}[Q_1(\varphi), N_1(\varphi)].$$

Ищем решение системы уравнений (16) в виде степенных рядов по параметру μ

$$\mathbf{\Phi}(\theta, \varphi, \psi) = \mathbf{\Phi}^{(0)} + \mu \mathbf{\Phi}^{(1)} + \mathrm{O}(\mu^2), \tag{20}$$

где верхний индекс указывает степень приближения данной величины.

Из уравнений системы (16) в силу соотношений (19), (20) следуют уравнения нулевого (при $\mu = 0$)

$$J\,\theta' = -\,N_2\,(\varphi), \quad J\,\varphi' = N_1\,(\varphi)\,\mathrm{ctg}\,\theta - k_3, \tag{21}$$

$$J\psi' = G - N_1\,(\varphi)\,(\sin\theta)^{-1}$$

и первого приближений

$$J\theta' = D_1 \sin\theta \sin\varphi \cos\varphi + Q_2\,(\varphi),$$

$$J\varphi' = [P(\varphi) - b_3]G\cos\theta - Q_1\,(\varphi)\,\mathrm{ctg}\,\theta + b_3 k_3, \tag{22}$$

$$J\psi' = Q_1\,(\varphi)\,(\sin\theta)^{-1} - J\,P\,(\varphi)\,G.$$

Здесь параметр $\qquad D_1 = (b_2 - b_1)\,G$

является малой по модулю величиной ввиду близости значений эксцентриситетов b_1, b_2.

Система уравнений базового приближения (21) вполне интегрируема при дополнительном ограничении

$$k_3 = 0. \tag{23}$$

Действительно, полагая $\varphi = \varphi\,(\theta)$, из первых двух уравнений системы (21) согласно условию (23) следует интеграл

$$N_1\,(\varphi)\sin\theta = C \qquad (C = const),$$

в силу которого имеет место квадратура

$$J^{-1}\tau = C\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{ds}{N_1\,(\varphi)\sqrt{N_1^2\,(\varphi) - C^2}}, \tag{24}$$

где $0 < C < |N_1|$, $N_1\,N_2 \neq 0$.

Зависимость вида $\varphi = \varphi(\tau)$ может быть получена путём обращения соотношения (24). Если данная зависимость известна, то функция вида $\theta = \theta(\tau)$ получается квадратурой из первого уравнения (21)

$$\theta(\tau) = \theta_0 - J^{-1} \int_0^{\tau} N_2(\varphi)\, ds. \tag{25}$$

Тогда в силу третьего уравнения этой системы имеем

$$\psi(\tau) = \psi_0 + J^{-1}\left[G\tau - C\int_0^{\tau} \sin^{-2}\theta(s)\, ds \right]. \tag{26}$$

Таким образом, квадратурные соотношения (24)–(26) решают задачу аналитического описания движения носителя гиростата при ограничении (23) в базовом (нулевом) приближении.

Рассмотрим систему уравнений (22) при следующих дополнительных к условию (23) ограничениях. Заменим величину $P(\varphi)$ на ее среднее за период значение $P_* = 0.5\,(b_1 + b_2)$ и примем

$$\left|Q_2(\varphi)\right| << \left|Q_1(\varphi)\right|, \quad \varphi \in (0,\, 2\pi n), \tag{27}$$

где $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Принятые ограничения позволяют выполнить приближённое интегрирование системы уравнений (22). Для этого, пренебрегая величиной $Q_2(\varphi)$ по сравнению с $Q_1(\varphi)$ согласно условию (27) и обозначая $u = \sin\theta, \quad D_2 = (P_* - b_3)\,G,$

из системы (22) получаем уравнение

$$[D_2 u - Q_1(\varphi)]\frac{du}{d\varphi} = D_1(\sin\varphi\cos\varphi)\,u^2. \tag{28}$$

Соотношение (28) является частным случаем общего *уравнения Абеля второго рода.* Оно может быть упрощено и проинтегрировано в соответствии с теорией интегрирования этого уравнения [12, с. 50].

Решение уравнения (28), существующее при $D_2 \neq 0$, с точностью до членов порядка $\mathrm{O}(b_1, b_2)$ близко (в орбитальном смысле) к величине $u(\varphi) = u_0 \exp[n(\sin^2\varphi - \sin^2\varphi_0)],$ (29)

где обозначено $u_0 = \sin\theta_0, \quad n = (2D_2)^{-1} D_1.$

В отдельно рассматриваемом случае, при $D_2 = 0$, уравнение (28) интегрируется в квадратурах.

Пусть $f(\varphi)$ − правая часть равенства (29). Выполняя аналогично предыдущему приближённое интегрирование системы уравнений (22), в силу зависимости (29) имеем

$$\theta(\tau) = \theta_0 + J^{-1} D_1 \int_0^{\tau} f(\varphi) \sin\varphi \cos\varphi \, ds, \tag{30}$$

$$J^{-1}\tau = 2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{f(s)\, ds}{[2 - f^2(s)][D_2 f(s) - Q_1(s)]}, \tag{31}$$

$$\psi(\tau) = \psi_0 - J^{-1} P_* G \tau + J^{-1} \int_0^{\tau} Q_1(\varphi) f^{-1}(\varphi)\, ds. \tag{32}$$

Обращая соотношение (31), можно получить зависимость вида $\varphi = \varphi(\tau)$, в результате чего становятся известными явные зависимости, определяемые равенствами (30), (32).

Выделение главного аддитивного члена зависимости вида $\varphi(\tau)$, производимое в силу соотношения (31), приводит к приближённой оценке $$\varphi(\tau) \approx \varphi_0 + J^{-1} D_2 \tau + \ldots \tag{33}$$

Согласно соотношениям (32), (30) в данном приближении носитель гиростата в пространстве переменных $\mathbf{\Phi}, \tau$ совершает равномерное прецессирование со скоростью $\upsilon = P_* G$, на которое налагается сложное квазипериодическое движение, обусловленное влиянием компонент гиростатического момента k_1, k_2 и параметров эксцентриситета b_1, b_2. Движение носителя по углу θ является квазипериодическим колебанием, наложенным на состояние, при котором $\theta = \theta_0$; это колебание является малым при малой величине параметра n.

В соответствии с оценкой (33) собственное вращение носителя гиростата в данном приближении является сложным движением, при котором на равномерное вращение, происходящее со скоростью ω, аддитивно налагается некоторое присоединённое движение. Порядок отклонения в этом движении в каждый момент времени τ по величине не превосходит порядка линейной части равенства (33).

Таким образом, в линейном приближении носитель гиростата, состояние которого в данном пространстве определяется системой уравнений (22), совершает движение, главная часть которого является *регулярной прецессией* по углам φ, ψ. При этом скорости прецессирования и собственного вращения равны, соответственно,

$$\Omega = J^{-1} P_* G, \qquad \omega = J^{-1} D_2. \tag{34}$$

Заключение

Движение механического объекта, находящегося под воздействием ортогонального силового вектор-момента, относится к особенным состояниям, обладающим рядом характерных свойств. Эти свойства могут быть использованы при решении некоторых прикладных задач.

Одним из упомянутых характерных свойств данного движения является существование для динамической системы (2) при $\mathbf{L} \neq 0$ независимых первых алгебраических интегралов (5), (6), вид которых соответствует форме интегралов, относящихся к случаю движения объекта по инерции, при котором $\mathbf{L} \equiv 0$.

Согласно равенствам (5), (6) апекс вектора $\boldsymbol{\omega}$ для $t \in T$ расположен в области пространства величин ω_j $(j = 1, 2, 3)$, являющейся пересечением шара (5) с пространственной областью, ограниченной эллипсоидом (6). Эта особенность является существенной при оценке $\boldsymbol{\omega}$-сходимости методом последовательных приближений решений системы динамических уравнений (12).

Решение (20), порождаемое $\mathbf{\Phi}^{(0)}, \mathbf{\Phi}^{(1)}$-системами (21), (22), соответственно, в m-приближении (m = 0, 1, 2, …) аппроксимирует точное решение эволюционной системы (16) на интервале τ-времени порядка μ^{-1} с погрешностями: порядка μ для переменных θ, φ и порядка 1 для переменной ψ.

Движение носителя по переменной ψ (ψ-движение) в первом μ-приближении при $n > 0$ представляет собой сложное движение, составленное из ограниченных движений, наложенных на его равномерное вращение вокруг вектора кинетического момента гиростата с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$ (34).

Аналогичным образом, φ-движение в том же приближении есть результирующее движение, порожденное наложением ограниченных локальных движений на равномерное собственное вращение носителя, происходящее со скоростью ω (34).

Упомянутые присоединённые ограниченные движения, происходящие в окрестности равномерных (ψ,φ)-движений, обусловлены влиянием компонент k_1, k_2 гиростатического момента и параметров эксцентриситета b_1, b_2.

Библиографический список

1. *Граммель Р.* Теория несимметричного гироскопа с реактивным приводом // Механика: период. сборник пер. иностр. статей. 1958, № 6. С. 145−151.

2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: в 3-х т. / пер. с англ. М.: Наука. Т. 3, 1967. 300 с.

3. *Смольников Б.А.* Обобщение эйлерова случая движения твёрдого тела // Прикладная математика и механика. 1967. Т. 31, вып. 4. С. 735−736.

4. *Смольников Б.А.* Движение твёрдого тела под действием ортогонального момента // Изв. акад. наук. Механика твёрдого тела. 1979, № 3. С. 30−36.

5. *Аппель П.* Теоретическая механика: в 2-х т. / пер. с франц. М.: Физматгиз. Т. 2. 1960. 488 с.

6. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений / пер. с англ. М.: Мир, 1964. 478 с.

7. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородною капельною жидкостью // Собр. соч. М.; Л.: Гостехиздат. Т. 1. 1949. С. 31−152.

8. *Volterra V.* Sur la theorie des variations des latitudes // Acta Mathematique. 1899. Vol. 22. P. 201−358 // Opere Matema-tiche. 1956. Vol. 2. Roma. P. 452−573.

9. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.

10. *Виттенбург Й.* Динамика систем твёрдых тел / пер. с англ. М.: Мир, 1980. 294 с.

11. *Смольников Б.А.* Движение вокруг центра инерции твёрдого тела с вращающимися маховиками // Прикладная математика и механика. 1966. Т. 30, вып. 4. С. 625−635.

12. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / пер. с нем. М.: Физматгиз, 1961. 704с.