ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ
Нелинейные динамические системы

Вып. 47 **Межвузовский сборник научных трудов** **2015**

УДК 531.57

Н.А. Репьях, Е.Н. Остапенко

Пермский государственный национальный исследовательский университет

Россия, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15
mpu@psu.ru; (342) 2 396-309

ВРЕМЯ НАХОЖДЕНИЯ ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ЗЕМЛИ В ОБЛАСТИ ТЕНИ ЗЕМЛИ ДЛЯ ПОЛЯРНЫХ КРУГОВЫХ ОРБИТ

Определяются временные характеристики областей затенения полярных круговых орбит искусственных спутников Земли, зависящие от даты прохождения спутника через область тени, от расположения плоскости орбиты относительно оси тени и от геометрических параметров орбиты.

Ключевые слова: полюс эклиптики; полюс мира; плоскость солнцестояний; наклон плоскости эклиптики; полярные орбиты.

Предполагается, что область тени Земли от Солнца представляет собой цилиндр радиуса R, R – радиус Земли, Земля – шар. Ось тени лежит в плоскости эклиптики.

Полярная орбита – непрецессирующая круговая орбита искусственного спутника Земли (ИСЗ), проходящая через ось мира.

Ось мира – ось суточного вращения Земли. Плоскость эклиптики – плоскость движения центра Земли вокруг Солнца.

Ниже приведены необходимые понятия и соотношения для нахождения времени *T* – времени прохождения ИСЗ в тени Земли.

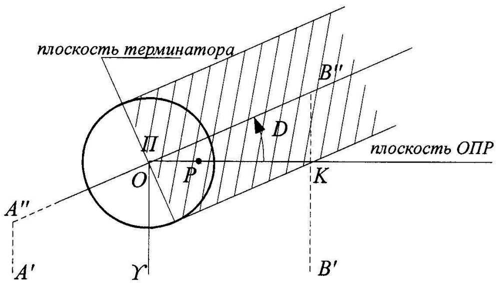

Рис. 1

Проекция области тени на плоскость эклиптики в момент времени, определяемый углом *D*, представлена на рис. 1. Угол даты *D* – угол между осью тени и плоскостью солнцестояний ОПР; *O* – центр Земли; *П* – полюс эклиптики; *P* – полюс мира; *OP* – ось суточного вращения Земли; $O\gamma$ – линия узлов плоскостей эклиптики и экватора, линия узлов перпендикулярна плоскости *ОПР*.

На рис. 2 приведена проекция области тени на плоскость солнцестояний *ОПР,* угол *ПОР* = ε – угол между плоскостью эклиптики и плоскостью экватора. Из геометрических построений можно определить бо′льшую ось *AB* эллипса пересечения плоскости земного экватора с границей области тени по проекциям $A'B'$ и $A''B''$. Точка *A* – верхняя вершина эллипса, *B* – нижняя вершина. Здесь "верх" и "низ" подразумеваются относительно плоскости эклиптики.

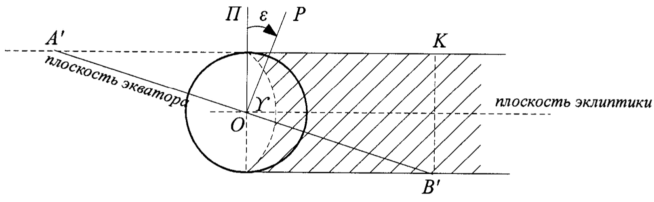

Рис. 2

Имеем

$$A'K = \frac{2R}{tg\varepsilon},\ \ A''B'' = {A'K}\Big/{\cos D} = \frac{2R}{tg\varepsilon\cos D},$$

$$\left(AB\right)^2 = \left(A''B''\right)^2 + \left(B'K\right)^2. \qquad (1)$$

В результате бо′льшая полуось экваториального эллипса тени будет

$$a = R\sqrt{1 + \left(tg\varepsilon\cos D\right)^{-2}}. \qquad (2)$$

Очевидно, малая полуось

$$b = R\ \ (R - \text{радиус Земли}) \qquad (3)$$

лежит в плоскости терминатора (рис. 1).

Относительно пространства, связанного с вращающейся вокруг оси *ОП* тенью Земли, ось мира *OP* описывает в течение года конус с углом раствора 2ε и в текущий момент времени образует с осью тени *ОК* угол *РОК* = α, зависящий от даты *D*.

Угол *РОК* определяем следующим образом (рис. 3):

$$OП = R,\ OP = {R}\Big/{\cos\varepsilon},\quad ПP = Rtg\varepsilon,\ OK = Rtg\varepsilon\cos D,$$

$$\cos\alpha = \frac{OK}{OP} = \sin\varepsilon\cos D, \qquad (4)$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\cos^2\varepsilon + \sin^2\varepsilon\sin^2 D}. \qquad (5)$$

Меридиональные плоскости полярных орбит образуют пучок плоскостей, проходящих через ось *OP*. Следы этих плоскостей на плоскости экватора обозначены для угла *D* как $\pi_1, -\pi_1', \pi_2, \pi_2', \ldots$ Плоскости π_i и π_i' симметричны (рис. 4) относительно плоскости *РОК*.

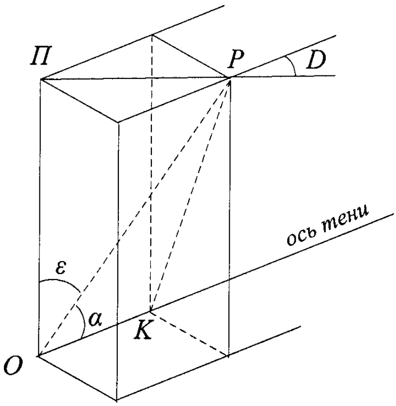

Рис. 3

Большие полуоси OL_i эллипсов от пересечения плоскостей π_i с областью тени могут быть определены по ортогональным проекциям OL_i' и OL_i'' большей полуоси эллипса тени. Здесь OL_i' – проекция большей полуоси на экваториальную плоскость, OL_i'' – проекция большей полуоси на плоскость *POK*. Точки $-L_1', -L_2', ..., -L_i'$ симметричны точкам $L_1', L_2', ..., L_i'$ соответственно симметрии плоскостей π_i и $-\pi_i$ относительно осевой плоскости тени *POK*, *AOB* – след плоскости экватора.

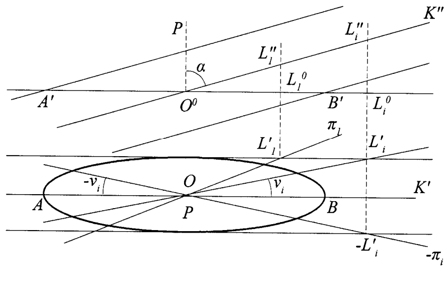

Рис. 4

Из рис. 4 имеем

$$OL_i' = R/\sin\nu_i\,,\quad O^0L_i^o = R/tg\nu_i\,,$$

"высота" вершин эллипсов тени над плоскостью AOB равна $L_i^0L_i'' = O^oL_i^o ctg\alpha$. Тогда большая полуось α_i эллипса тени в плоскости π_i определяется равенством:

$$a_i = \sqrt{\left(OL_i'\right)^2 + \left(L_i^0L_i''\right)^2} = R\sqrt{1 + ctg^2\nu_i\left(1 + ctg^2\alpha\right)}, \qquad (6)$$

где $$ctg^2\alpha = \frac{\cos^2\varepsilon\cos^2 D}{\cos^2\varepsilon + \sin^2\varepsilon\,\sin^2 D} = \frac{\cos^2 D}{1 + \sin^2 D\,tg^2\varepsilon}.$$

Таким образом, большая полуось полуэллипса тени полярных орбит ИСЗ зависит от радиуса планеты R, от наклонения плоскости экватора к плоскости эклиптики ε, от угла ν_i, определяемого часовым углом плоскости запуска π_i относительно положения оси тени в полночь, и от даты D – угла между осью тени в момент запуска ИСЗ и осью тени в момент зимнего солнцестояния.

Время T нахождения в области тени ИСЗ, движущегося по круговой орбите радиуса r ($R < r < a_i$) в плоскости π_i, определяется углом 2β (рис. 5).

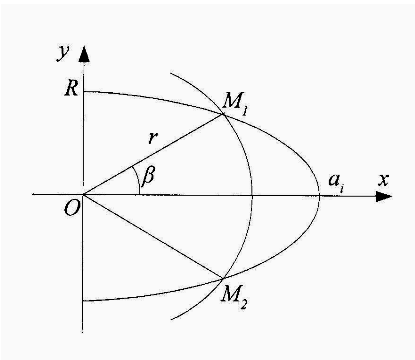

Рис. 5

Декартовые координаты точек пересечения круговой орбиты

$$x^2 + y^2 = r^2$$

и границы полуэллипса тени (рис. 5)

$$\frac{x^2}{\alpha_i} + \frac{y^2}{R^2} = 1$$

определяют направляющие косинусы вектора OM_1:

$$\cos\beta = \frac{x_1}{r}; \quad \sin\beta = \frac{y_1}{r}; \quad tg\beta = \frac{y_1}{x_1}.$$

Здесь (x_1, y_1) координаты точки M_1:

$$x_1 = \sqrt{\frac{\alpha_i^2\left(r^2 - R^2\right)}{\alpha_i^2 - R^2}}, \quad y_1 = \sqrt{\frac{R^2\left(\alpha_i^2 - r^2\right)}{\alpha_i^2 - R^2}}.$$

Тогда

$$tg\beta = \frac{R}{\alpha_i}\sqrt{\frac{\alpha_i^2 - r^2}{r^2 - R^2}}. \quad (7)$$

Из известных соотношений небесной механики [1; 2]:

$$T = \frac{2\beta}{\omega}, \quad \omega = \sqrt{\frac{\mu}{r^3}}, \quad (8)$$

где μ – гравитационная постоянная Земли, ω – угловая скорость движения ИСЗ по круговой орбите.

Таким образом, соотношения (4)–(8) определяют время *T* в зависимости от даты *D,* от расположения плоскости орбиты относительно оси тени (угол ν_i) и от радиуса r круговой орбиты.

Библиографический список

1. *Белецкий В.В.* Очерки о движении космических тел. М.: Наука, 1972. 360 с.

2. *Основы* теории полета космических аппаратов / под ред. Г.С. Нариманова, М.К. Тихонравова. М.: Машиностроение. 1972. 608 с.