

УДК 531.57

С. А. Елыгин, С. В. Лутманов

*Пермский государственный национальный
исследовательский университет*

Россия, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15
8 (342) 2-396-309

ПРОВЕРКА ПОЛНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ МОДЕЛИ ДВУСТВОЛЬНОГО СТРОИТЕЛЬНОГО Артиллерийского Орудия

Проведена проверка на полную управляемость линеаризованной системы дифференциальных уравнений динамики двухствольного строительного артиллерийского орудия в окрестности вертикального закона его движения. Для рассматриваемых численных данных эта проверка дала положительный результат, что позволяет ставить и эффективно решать задачу оптимального управления двухствольным строительным артиллерийским орудием о возвращении сваи на вертикальную траекторию движения.

Ключевые слова: математическая модель; линеаризованные дифференциальные уравнения; полная управляемость; оптимальное управление.

Введение

Начиная с 90-х годов прошлого века в Российской Федерации ведутся научные исследования по созданию математических моделей и конструкций артиллерийских орудий, застреивающих строительные элементы в грунт [3–7]. В работе [1] авторами была построена модель двухствольного артиллерийского орудия с четырьмя степенями свободы. Ее принципиальная схема приведена на рис. 1.

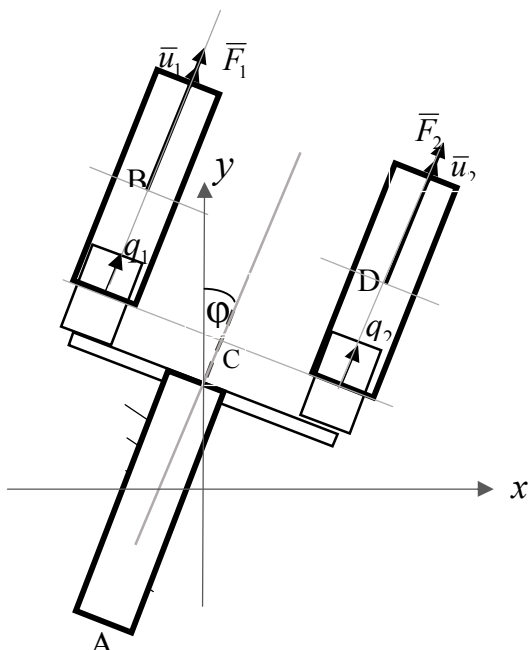


Рис. 1. Принципиальная схема модели двухствольного артиллерийского орудия с четырьмя степенями свободы

Здесь B, D – центры масс стволов, C – центр массы "вилки + сваи". В качестве обобщенных координат берутся:

q_1 – смещение ствола первой пушки относительно вилки, при $q_1 = 0$ центр масс ствола пушки находится на уровне верхнего конца поршня;

q_2 – смещение ствола второй пушки относительно вилки, при $q_2 = 0$ центр масс ствола пушки находится на уровне верхнего конца поршня;

$q_3 = \varphi$ – угол между вертикалью и свай, при $\varphi = 0$ свая вертикальна;

$q_4 = y_C$ – смещение сваи по вертикали, при $y_C = 0$ и $\varphi = 0$ нижний конец сваи находится на поверхности земли.

Принимается, что смещения центра масс сваи по горизонтали не происходит.

Силы, возникающие в каналах стволов в результате сжигания заряда, имеют вид

$$\begin{aligned} F_1 &= Sp \left(\frac{l_0}{l_0 + (q_1 - q_{10})} \right)^{1+\theta}, \\ F_2 &= Sp \left(\frac{l_0}{l_0 + (q_2 - q_{20})} \right)^{1+\theta}, \end{aligned} \quad (1)$$

где S, p, l_0, θ – заданные параметры, а $q_{i0}, i = 1, 2$ – начальные значения обобщенных координат. Линии действия управляющих сил \bar{u}_1, \bar{u}_2 направлены вдоль ствола.

На базе описанной модели ставится задача управления, цель которого состоит в том, чтобы в момент окончания выстрела свая приняла вертикальное положение. Решение этой задачи требует проверки на полную управляемость линеаризованных уравнений движения орудия. В работе приводится алгоритм указанной проверки.

1. Вывод основной системы дифференциальных уравнений

Пусть $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)^T$ – вектор обобщенных координат. Его изменение во времени описывается дифференциальными уравнениями Лагранжа второго

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{dT}{d\varphi} = Q_{q_i}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (1.1)$$

Здесь кинетическая энергия системы T вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} T &= T_C + T_B + T_D = \\ &= \frac{1}{2} I_C \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} I_B \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} I_D \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} M \left((\dot{y}_a + d\dot{\varphi} \cos \varphi)^2 + (d\dot{\varphi} \sin \varphi)^2 \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} m_1 \left((\dot{q}_1 \sin \varphi + \dot{y}_a + (b + q_1) \dot{\varphi} \cos \varphi - a \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + \right. \\
 & \quad \left. + (\dot{q}_1 \cos \varphi - a \dot{\varphi} \cos \varphi - (b + q_1) \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 \right) + \\
 & + \frac{1}{2} m_2 \left((\dot{q}_2 \sin \varphi + \dot{y}_a + (b + q_2) \dot{\varphi} \cos \varphi + a \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + \right. \\
 & \quad \left. + (\dot{q}_2 \cos \varphi + a \dot{\varphi} \cos \varphi - (b + q_2) \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 \right),
 \end{aligned}$$

где M – масса "вилки + сваи",

m_1, m_2 – масса первого и второго ствола соответственно,

b – общая высота поршня-забойника и застреливаемой сваи,

I_C – момент инерции "вилки + сваи" относительно своего центра масс;

I_B – момент инерции первой пушки относительно своего центра масс;

I_D – момент инерции второй пушки относительно своего центра масс.

Обобщенные силы $Q_{q_i}, i = 1, 2, 3, 4$ имеют вид:

$$Q_{q_1} = -m_1 g \sin \varphi + Sp \left(\frac{l_0}{l_0 + (q_1 - q_{10})} \right)^{1+\theta} + u_1,$$

$$Q_{q_2} = -m_2 g \sin \varphi + Sp \left(\frac{l_0}{l_0 + (q_2 - q_{20})} \right)^{1+\theta} + u_2,$$

$$\begin{aligned}
 Q_{q_3} = & -g \left(Md \cos \varphi + m_1 \left((b + q_1) \cos \varphi - a \sin \varphi \right) + \right. \\
 & \left. + m_2 \left((b + q_2) \cos \varphi + a \sin \varphi \right) \right), \quad Q_{q_4} = -(M + m_1 + m_2) g.
 \end{aligned}$$

Уравнение (1.1) могут быть разрешены относительно старших производных (здесь и далее аналитические преобразования осуществляются в среде пакета Wolfram Mathematica-8), т. е. приведены к виду

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 &= p_1(t, q_1, q_2, q_3, q_4, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dot{q}_4, u_1, u_2), \\ \ddot{q}_2 &= p_2(t, q_1, q_2, q_3, q_4, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dot{q}_4, u_1, u_2), \\ \ddot{\varphi} &= p_3(t, q_1, q_2, q_3, q_4, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dot{q}_4, u_1, u_2), \\ \ddot{y}_A &= p_4(t, q_1, q_2, q_3, q_4, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dot{q}_4, u_1, u_2)\end{aligned}\tag{1.2}$$

В новых переменных

$$\begin{aligned}y_1 &= q_1, y_2 = q_2, y_3 = q_3, y_4 = q_4 \\ y_5 &= \dot{q}_1, y_6 = \dot{q}_2, y_7 = \dot{q}_3, y_8 = \dot{q}_4\end{aligned}\tag{1.3}$$

система (1.2) запишется в нормальной форме

$$\begin{aligned}y_1 &= y_5, \dot{y}_5 = p_1(t, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, u_1, u_2), \\ y_2 &= y_6, \dot{y}_6 = p_2(t, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, u_1, u_2), \\ y_3 &= y_7, \dot{y}_7 = p_3(t, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, u_1, u_2), \\ y_4 &= y_8, \dot{y}_8 = p_4(t, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, u_1, u_2).\end{aligned}\tag{1.4}$$

2. Линеаризация дифференциальных уравнений динамики артиллерийского орудия в окрестности базового закона движения

В качестве базового закона движения принимаем решение системы (1.4) дифференциальных уравнений динамики, полученных в предыдущем пункте, в которых силы $F_1(t), F_2(t), t \in [t_0, T]$ изменяются по заданному закону (1), начальные условия принимаются в виде $q_1(t_0) = q_2(t_0) = q_{10} = q_{20}, \varphi(t_0) = 0, y(t_0) = 0$, а управляющие воздействия $u_1(t) \equiv 0, u_2(t) \equiv 0, t \in [t_0, T]$ отсутствуют. Заметим, что выбранные начальные условия обеспечивают вертикальное положение свай за все время движения. Обозначим базовое движение символом

$$\begin{aligned}y^*(t) &= \\ &= (y_1^*(t), y_2^*(t), y_3^*(t), y_4^*(t), y_5^*(t), y_6^*(t), y_7^*(t), y_8^*(t)).\end{aligned}$$

Линеаризованные уравнения движения здесь имеют

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in R^8, \quad u \in R^2, \quad (2.1)$$

где

$$A(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{y=y^*(t) \\ u=0}}, \quad B(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{y=y^*(t) \\ u=0}}$$

матрицы размера 8×8 и 8×2 соответственно.

3. Проверка полной управляемости

Произведем проверку полной управляемости системы (2.1).

Определение 1. Линейная динамическая система

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u$$

называется *вполне управляемой на промежутке времени* $[t_0, T]$, *если для любых векторов* $x_0, x_T \in R^n$ *существует такое программное управление* $u(\cdot)$, *что для него выполняется*

$$x(T, t_0, x_0, u(\cdot)) = x_T.$$

Полагаем

$$L_1(t) = B(t), L_2(t) = A(t)L_1(t) - \frac{d}{dt}L_1(t), \dots,$$

$$L_n(t) = A(t)L_{n-1}(t) - \frac{d}{dt}L_{n-1}(t).$$

Сконструируем матрицу $K(t) = (L_1(t), \dots, L_n(t))$ размера $n \times (r \cdot n)$.

Теорема 1. Пусть существует момент времени $t_* \in [t_0, T]$ такой, что $\text{rang}[K(t_*)] = n$. Тогда система (1) вполне управляема на промежутке времени $[t_0, T]$.

Доказательство теоремы приведено, например, в работе [2].

Численный эксперимент

Приведем данные для численного интегрирования уравнений Лагранжа проведения линеаризации:

$a = 1 м$ – половина ширины вилки;

$b = 10.5 м$ – высота "вилки + сваи";

$l = 2.345 м$ – длина ствола пушки

$d = 5 м$ – расстояние от нижнего конца вилки до центра масс "вилки + сваи";

$M = 840 кг$ – масса "вилки + сваи";

$m_1 = m_2 = m = 3600 кг$ – массы пушек,

$I_c = \frac{1}{4} M d^2 = 5250 кг \cdot м^2$ – момент инерции "вилки + сваи" относительно своего центра масс;

$I_B = I_D = \frac{1}{12} m l^2 = 1649.71 кг \cdot м^2$ – момент инерции пушки относительно своего центра масс.

$p = 2500000000 Па$, $l_0 = 0, 01 м$, $S = 0.0227 м^2$,

$q_{10} = q_{20} = -\frac{2.345}{2} м$, $\theta = 0.2$

Время окончания процесса $T = 0.08 с$.

При реализации алгоритма проверки полной управляемости системы была обнаружена проблема. Вследствие того, что элементами матриц $A(t)$ и $B(t)$ служат интерполяционные полиномы, полученные в результате численного интегрирования системы (1.1), а построение столбцов матрицы K сводится к их многократному умножению и дифференцированию, на определенном шаге данных становится настолько много, что оперативной памяти компьютера оказывается не достаточно для хранения всех столбцов матрицы. Конкретно в нашем случае первое переполнение памяти случилось при вычислении седьмого столбца матрицы K .

Решение этой проблемы было осуществлено путем замены громоздкого аналитического выражения для элемента матрицы его приближением. Именно, если при вычислении текущего столбца матрицы K память переполняется, то аналитические выражения в предыдущем вычисленном столбце заменяются интерполяционными полиномами, после этого алгоритм вычисления матрицы продолжает свою работу.

В случае повторения проблемы алгоритм замены выражений следует повторить.

В качестве доказательства полной управляемости для выбранных численных данных системы приведем значение построенной матрицы K в конкретный момент времени $t_* = 0.053 \text{ c}$.

Для удобства отображения приведем эту матрицу в транспонированном виде (ее ранг при этом не меняется):

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-0,04	-0,01	0	0,04
0	0	0	0	0	0	0	0
-0,04	-0,01	0	0,04	-2,13	-0,40	0	1,72
0	0	0	0	0	0	0	0,00
-4,25	-0,80	0	3,44	-140,01	-26,49	0	113,53
0	0	0	0	0,14	0,03	0	0,12
-422,75	-79,97	-0,01	342,77	-11832,1	-2256,46	15,086	9606,01
0,43	0,08	0,01	-0,35	-2,88	17,39	-15,09	-9,89
-47870,5	9241,33	155,22	38940,03	-1333885	-124949	-107004	995840,3
-106,12	164,27	-155,22	-39,81	108268,8	-106424	107003,3	-1026,29
6637728	803051	-380266	5076389	$-1,7 * 10^8$	$-2,6 * 10^7$	4169280	$1,28 * 10^8$
386689,4	378084	380264,5	-5209,38	4351728	-4212914	4169802	-145552

Докажем, что ранг этой матрицы равен 8. Для этого выберем минор 8×8 , состоящий из 9-й–16-й строк приведенной матрицы

-4,25	0	-422,75	0,43	-47870,5	-106,12	-6637728	386689,4
-0,80	0	-79,97	0,08	-9241,33	164,27	-803051	-378084
0	0	-0,01	0,01	155,22	-155,22	-380266	380264,5
3,44	0	342,77	-0,35	38940,03	-39,81	5076389	-5209,38
140,01	0,14	11832,1	-2,88	1333885	108268,8	$-1,7 \cdot 10^8$	4351728
-26,49	0,03	2256,46	17,39	-124949	-106424	$-2,6 \cdot 10^7$	4212914
0	0	15,086	15,09	-107004	107003,3	-4169280	4169802
113,53	-0,12	9606,01	-9,89	995840,3	-1026,29	$1,28 \cdot 10^8$	-145552

и покажем, что он отличен от нуля. Действительно $D = 3.83243 \cdot 10^{13} \neq 0$. Полная управляемость системы доказана.

Библиографический список

1. Елыгин С.А., Лутманов С.В. Линеаризованная математическая модель двухствольного строительного артиллерийского орудия // Проблемы механики и управления: межвуз. сб. науч. тр. Пермь, 2015. Вып. 47. С. 32–44.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
3. Бартоломей А.А., Григорьев В.Н., Омельчак И.М., Пенский О.Г. Основы импульсной технологии устройства фундаментов: моногр. Пермь: Изд-во ПГТУ. 2002. 179 с.
4. Маланин В.В., Лутманов С.В., Остапенко Е.Н. Математическая модель двухствольной строительной артиллерийской системы // Вестник Пермского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Вып. 3(26). С. 42–47.
5. Маланин В.В., Пенский О.Г. Сопряженные модели динамики импульсно-тепловых машин и проникания недеформируемых тел в сплошную среду: моногр. Пермь: Перм. гос. ун-т. 2007. 199 с.
6. Маланин В.В., Пенский О.Г., Проничев А.А., Ракко А.Ю. Установка для погружения в грунт строительных элементов. Патент РФ № 2348757. Оpubл. БИ № 7 10.03.2009.
7. Пенский О.Г., Проничев А.А. Многоствольная артиллерийская установка для погружения в грунт строительных элементов // Изобретатель. Минск. 2010. С. 15–19.