ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ
Нелинейные динамические системы

Вып. 48 Межвузовский сборник научных трудов 2016

УДК 531.36

Н.Н. Макеев
Институт проблем точной механики и управления РАН

Россия, 410028, Саратов, ул. Рабочая, 24
nmakeyev@mail.ru; (845) 272-35-33

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ГИРОСТАТА С ДИССИПАЦИЕЙ

Исследуется асимптотическая устойчивость гиростата с полной диссипацией, движущегося в однородном параллельном поле силы тяжести относительно неподвижного полюса под воздействием нестационарного силового момента, зависящего от величины компоненты угловой скорости носителя гиростата и действующего вдоль его оси симметрии. Гиростат обладает постоянным гиростатическим моментом и осевой структурно-динамической симметрией с осью, коллинеарной внешнему силовому моменту. Показана равномерная асимптотическая устойчивость невозмущенного движения гиростата, достижимая на многообразии его возможных движений.

Ключевые слова: *гиростат; асимптотическая устойчивость; диссипация; прямой метод Ляпунова.*

Введение

В динамике систем твердых тел и гиростатов актуальна задача об асимптотической устойчивости вращения механического объекта с осевой кинетической симметрией, движущегося под воздействием нестационарного силового момента в однородной изотермической сплошной среде с сопротивлением. Это сопротивление представляется явной функцией от компонент его угловой скорости и, в зависимости от характера постановки задачи, задается различными аналитическими выражениями.

В настоящей работе результирующий момент сил сопротивления определяется диссипативной функцией, представленной однородной формой произвольной степени.

1. Основные предпосылки

Свободный от связей гиростат с заданным постоянным гиростатическим моментом движется в однородном параллельном поле силы тяжести так, что его неизменяемая основа (*телоноситель*) движется вокруг неподвижного полюса O, не совпадающего в общем случае с центром масс гиростата.

Введем правые координатные ортобазисы с общим началом в полюсе O: неподвижный базис Z ($Oz_1z_2z_3$), неизменно связанный с инерциальным пространством, и подвижный базис X ($Ox_1x_2x_3$), оси которого направлены по главным в полюсе O направлениям тензора инерции гиростата (*главный координатный базис*).

Пусть $\mathbf{s}$ (s_1, s_2, s_3) – опорный орт, неизменно связанный с координатным базисом Z, и устанавливающий ориентацию базиса X относительно базиса Z.

Обозначим: $\mathbf{A} = diag(A_1, A_2, A_3)$ – матрица тензора инерции гиростата в полюсе O; $\boldsymbol{\omega}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – абсолютная угловая скорость носителя гиростата; $\mathbf{k}(k_1, k_2, k_3)$ – гиростатический момент, заданный в базисе X; $\mathbf{r}_c$ ($x^c{}_1$, $x^c{}_2$, a) – радиус-вектор центра масс гиростата; $\mathbf{P}$ – вес гиростата. На гиростат, помимо момента силы тяжести, действует заданный результирующий силовой момент $\mathbf{L}$ (t, $\boldsymbol{\omega}$), компоненты которого L_j (t, ω_j) ($j = 1, 2, 3$) являются действительными ограниченными по модулю функциями класса C^0, определенными для значений натурального времени $t \in T = [0, +\infty)$. Здесь и всюду далее координаты всех указанных векторов и элементы матрицы $\mathbf{A}$ отнесены к координатным осям базиса X.

Движение гиростата вокруг неподвижного полюса O при данных предпосылках определяется системой уравнений

$$\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}) + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}) + P\,(\mathbf{r}_C \times \mathbf{s}) = \mathbf{L}(t, \boldsymbol{\omega}), \qquad (1)$$
$$\dot{\mathbf{s}} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s}) = 0,$$

где $\mathbf{s}$ – орт вертикали, неизменно связанный с базисом Z и направленный против силы тяжести.

Уравнения (1) образуют нелинейную многопараметрическую систему, аналитически замкнутую относительно переменных $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{s}$. Этой системе ставится в соответствие тривиальный первый интеграл $|\mathbf{s}|^2 = 1$.

2. Постановка задачи

Исходная система уравнений (1) является многочастотной эволюционной динамической системой, определенной в конечной открытой области фазового пространства $\mathbf{R}^6$.

Введем для гиростата следующие структурно-динамические условия.

1. Гиростатический момент $\mathbf{k}\,(k_1, k_2, k_3)$ постоянен относительно главного базиса инерции гиростата.

2. Гиростат обладает осевой структурно-динамической симметрией вида

$$\begin{gathered} A_1 = A_2 = A, \quad k_1 = k_2 = 0, \quad k_3 = k, \\ x_1^c = x_2^c = 0, \quad x_3^c = a \neq 0. \end{gathered} \qquad (2)$$

3. Действующий на гиростат внешний силовой момент $\mathbf{L}(t, \omega)$ составлен из двух компонент: диссипативной $\mathbf{L}_D$ и неимпульсивной гладкой активной $\mathbf{L}_A$. Пусть $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}\,(\omega_1, \omega_2)$; тогда

$$\begin{gathered} \mathbf{L}_D(t, \boldsymbol{\Omega}) = grad_{\boldsymbol{\Omega}}\, R, \\ \mathbf{L}_A(t, \omega_3) = L_3(t, \omega_3)\,\mathbf{e}_3, \end{gathered} \qquad (3)$$

где $\mathbf{e}_3$ − орт оси Ox_3.

В равенствах (3) $R\,(t, \omega_1, \omega_2)$ – диссипативная функция Рэлея класса C^1, являющаяся положительно определенной (по отношению к переменным ω_1, ω_2) однородной формой степени $n \geq 2$, коэффициенты которой − ограниченные непрерывные действительные функции времени t. При этом предполагается, что

$$\left| L_j \right| \le l_j \quad (j = 1, 2), \tag{4}$$

где $l_j > 0$ − заданные действительные числа.

Рассмотрим стационарное состояние гиростата, при котором в $\mathbf{R}^5$-пространстве переменных $(\omega_1, \omega_2, \mathbf{s})$

$$\omega_j = s_j = 0 \quad (j = 1, 2), \quad s_3 = 1 \quad (t \in T). \tag{5}$$

Ставится следующая задача: исследовать на асимптотическую устойчивость стационарное состояние (5) гиростата, удовлетворяющее системе уравнений (1) при заданных предпосылках и ограничениях (2)−(4). □

Решение данной задачи проводится на основе теоремы В.М. Матросова об асимптотической устойчивости [1].

3. Исследование асимптотической устойчивости

Используя свойства структурно-динамической симметрии гиростата, введем комплексные переменные

$$w = \omega_1 + i\omega_2, \quad s = s_1 + i s_2, \quad L = L_1 + i L_2,$$

в которых система уравнений (1) в проекциях на оси координат базиса X согласно принятым предпосылкам и соотношениям (2), (3) имеет вид

$$\begin{aligned} A\dot{w} &= -[(A - A_3)\omega_3 - k] i w - i P a s - L(t, w), \\ A_3\dot{\omega}_3 &= L_3(t, \omega_3), \end{aligned} \tag{6}$$

$$\dot{s} = i(w s_3 - \omega_3 s), \qquad \dot{s}_3 = \operatorname{Im}(w\bar{s}), \tag{7}$$

где $\operatorname{Im}(w\bar{s}) = -\operatorname{Im}(\bar{w}s)$. Здесь и всюду в дальнейшем черта сверху обозначает комплексно сопряженную величину.

Выделим из системы уравнений (6), (7) подсистему, составленную из этих уравнений и не содержащую второго уравнения (6); данную подсистему назовем *А-подсистемой.* Условимся, что задача, поставленная в п. 2 для стационарного состояния гиростата (5), принимаемого за невозмущенное, относится A-подсистеме уравнений (6), (7) при условиях (2)−(4).

Для A-подсистемы уравнений (6), (7) имеет место тривиальный первый интеграл

$$\left|s\right|^2 + s_3^2 = 1. \tag{8}$$

Далее предполагается, что второе уравнение полной системы уравнений (6) интегрируемо по ω_3 в квадратурах, так что известна точная ограниченная и непрерывная аналитическая зависимость вида $\omega_3(t) = r(t)$, определённая для $t \in T$. В силу этого положим

$$m(t) = (A - A_3)r(t) - k, \tag{9}$$

или, в другой форме,

$$m(t) = Ar(t) - G_3(t), \tag{10}$$

где $Ar(t)$ – собственный кинетический момент гиростата (спин), $G_3\ (t)$ – проекция вектора кинетического момента гиростата на ось его кинетической симметрии, $m\ (t)$ – гироскопическая функция гиростата.

Представим первое уравнение системы (6) в виде

$$A\dot{w} = -i(mw + Pa)s - L(t, w), \tag{11}$$

где величина m определяется равенствами (9), (10), а

$$L(t, w) = \left(\frac{\partial}{\partial\omega_1} + i\frac{\partial}{\partial\omega_2}\right)R\,(t, w).$$

Согласно условию однородности диссипативной функции R, определяемому соответствующей теоремой Эйлера, имеем

$$\mathrm{Re}\,(w\overline{L}) = nR\,(t, w), \tag{12}$$

где n – показатель однородности. Тогда первый интеграл A-подсистемы уравнений (7), (11) представляется в виде

$$F\,(\left|w\right|, s_3) + n\int R(t, w)\,dt = h. \tag{13}$$

В соотношении (13) обозначено

$$F\,(\left|w\right|, s_3) = \frac{1}{2}A\left|w\right|^2 + Pas_3, \tag{14}$$

h − постоянная интегрирования. Характерно, что выражение (13) для интеграла не содержит явно гироскопической функции $m\ (t)$ (9), (10).

Введем характерную функцию

$$V(|w|, s_3) = F(|w|, s_3) + Pa, \tag{15}$$

где величина F определяется равенством (14), а переменная s_3, согласно тождеству (8), представляется в виде

$$s_3 = +\sqrt{1 - |s|^2}.$$

Здесь принято положительное значение радикала с тем, чтобы частному решению $w = s = 0$ A-подсистемы уравнений (6), (7) соответствовало бы значение $s_3 = +1$.

В силу данного выражения функции F, V представляются в виде, соответственно,

$$\begin{gathered} F(|w|, |s|) = \frac{1}{2} A|w|^2 + Pa\sqrt{1 - |s|^2}, \\ V(|w|, |s|) = F(|w|, |s|) + Pa. \end{gathered} \tag{16}$$

Согласно соотношениям (7), (8), (15) и условию (12) однородности диссипативной функции R в результате получаем

$$\dot{V}(t, w) = -\operatorname{Re}(w\overline{L}) = -nR(t, w), \tag{17}$$

причем $\operatorname{Re}(w\overline{L}) = \operatorname{Re}(\overline{w}L)$.

В силу положительной определенности функции R величина $\dot{V}$ (17) является отрицательно определенной по отношению к переменным $\operatorname{Re} w$, $\operatorname{Im} w$ в окрестности невозмущенного движения гиростата (5), выбранной соответствующим образом.

Решение поставленной задачи проведем на основе теоремы В.М. Матросова об асимптотической устойчивости [1]. Для этого, помимо функции V (16), введем величину

$$W = A\operatorname{Im}(\overline{w}s), \tag{18}$$

тождественную принятой в работе [2], и вычислим функцию

$$\begin{gathered} \dot{W} = A|w|^2\sqrt{1 - |s|^2} - G_3(t)\operatorname{Re}(w\overline{s}) + \\ + Pa|s|^2 + \operatorname{Im}(\overline{s}L). \end{gathered} \tag{19}$$

Здесь величина $G_3 = A_3 r + k$ − аддитивная составляющая гироскопической функции (10).

Проведем верификацию условий теоремы В.М. Матросова для функций (16)−(19). Пусть u − совокупность значений величин $|w|, |s|$, определенных на соответствующих ограниченных множествах; $f_i \ (i = 0, 1, 2)$ – некоторые функции от u (функции сравнения); f – функция, являющаяся правой частью уравнения (11); H_1, H_2 – заданные действительные постоянные.

Введем условия [3], принятые в данной задаче с точностью до постоянного множителя

$$f_1(u) \le V(u) \le f_2(u), \tag{20}$$

$$\dot{V}(w) \le \dot{V}_p(w) \le 0, \tag{21}$$

$$|W(u)| < H_1 \tag{22}$$

$$|\dot{W}(u)| \ge f_0(u), \tag{23}$$

$$|f(u)| < H_2 \tag{24}$$

и обозначим

$$[F_1(u),\ F_2(u)] = \frac{1}{2}(A|w|^2 \mp Pa|s|^2),$$

где знаки − и + относятся к функциям F_1, F_2, соответственно.

В случае, при котором параметр $a > 0$, согласно равенству (15), выберем $f_1(u) = F_1(u)$, $f_2(u) = F_2(u)$, а при $a < 0$ примем выражения $f_1(u) = F_2(u)$, $f_2(u) = F_1(u)$. При таком функциональном выборе заданные условия (20) выполняются.

Функцию $\dot{V}_p(w)$ выберем в виде $\dot{V}_p = -n\rho R(t, w)$, где ρ – действительное число такое, что $0 \le \rho \le 1$. Тогда, согласно равенству (17), условие (21) выполняется в силу соответствующего выбора числа ρ.

Обозначим $n_1 = (\mathrm{Re}\, w)^*, n_2 = (\mathrm{Im}\, w)^*$, где индекс * относится к граничным значениям соответствующих величин (нижним или верхним). Тогда, согласно представлению (18), условие (22) выполняется в силу ограниченности значений величин $|\mathrm{Re}\, w|, |\mathrm{Im}\, w|$, причем можно принять $H_1 = A(|n_1| + |n_2|)$.

Для выполнения условия (23) достаточно в качестве функции $f_0(u)$ выбрать модуль величины, являющейся правой частью равенства (19), в которой отброшена неотрицательная функция – ее первое слагаемое. В силу этого условие (23) выполняется.

Для ограниченной величины $\left| f(u) \right|$ условие (24) выполняется в силу ограниченности модуля функции, составляющей правую часть уравнения (11). При этом можно принять значение

$$H_2 = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}\,,$$

где обозначено $h_j = mn_{3-j} + Pa + l_j \quad (j = 1, 2)$.

Итак, все условия (20)−(24) теоремы В.М. Матросова [1, 3] выполнены. Следовательно, для любых начальных значений переменных t_0, u_0 и принятых предпосылок при малых возмущениях невозмущенное движение гиростата (5) равномерно по t_0, u_0 асимптотически устойчиво на многообразии его возможных движений.

Заключение

Приведённая здесь ограниченная задача об асимптотической устойчивости невозмущенного движения гиростата с диссипацией логически связана с общей фундаментальной проблемой устойчивости стационарного движения системы твердых тел, находящейся под воздействием заданного диссипативного и активного моментно-силовых факторов. Кроме того, данная задача является гиростатическим обобщением аналогичной задачи, рассмотренной для твердого тела при идентичных предпосылках [3, с. 60].

Исследование равномерной асимптотической устойчивости невозмущенного состояния гиростата в рассмотренной задаче проводилось на основе теоремы В.М. Матросова, относящейся в общем случае к неавтономной динамической системе. Здесь применена характерная функция (15), удовлетворяющая условиям (20), для которой, вообще говоря, не требуется выполнения условия отрицательной определенности производной по t (как это имеет место в теории А.М. Ляпунова [4]), а необходимо только выполнение условия неположительности в соответствии с заданными ограничениями (21) [5].

Основное условие, принятое в теории устойчивости неавтономных динамических систем, состоящее в том, что множество N, на котором $V(t, u) = 0$, не содержит целых положительных полутраекторий, в используемой теореме не применяется. Вместо этого, наряду с функцией V, вводится другая характерная функция, W (18), определяемая в некоторой окрестности δ множества N. При этом δ выбирается так, чтобы решения рассматриваемой системы не находились достаточно "долгое время" [3] вблизи множества N.

Таким образом, при заданных предпосылках и ограничениях, наложенных на структурно-динамические параметры гиростата, его невозмущенное движение равномерно асимптотически устойчиво при любых начальных значениях независимых переменных.

Пусть t_0 – начальный момент времени; $(\mathbf{\Omega}_0, \mathbf{v}_0) = [\mathbf{\Omega}(t_0), \mathbf{v}(t_0)]$, где $\mathbf{v} = \mathbf{v}(s_1, s_2)$. Тогда, согласно теореме В.М. Матросова, для любых значений $t_0 \in T$ и $(\mathbf{\Omega}_0, \mathbf{v}_0) \in \mathbf{R}^4$ имеет место равенство $\lim u(t, t_0, u_0) = 0$ при $t \to +\infty$ равномерно по t_0, u_0.

Это свойство также выражает равномерную асимптотическую при $t \to +\infty$ устойчивость невозмущенного движения гиростата при малых возмущениях.

Библиографический список

1. *Матросов В.М.* Об устойчивости движения // Прикладная математика и механика. 1962. Т. 26. Вып. 5. С. 885−895.

2. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1965. 208 с.

3. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 302 с.

4. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 471 с.

5. *Matrosov V.M.* Comparison method in system's dynamics // Equations differentielles et fonctionnelles non lineaires. Paris: Hermann, 1973. P. 407−445.