ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ
Нелинейные динамические системы

Вып. 48 Межвузовский сборник научных трудов 2016

УДК 531.38

Н.Н. Макеев
Институт проблем точной механики и управления РАН

Россия, 410028, Саратов, ул. Рабочая, 24
nmakeyev@mail.ru; (845) 272-35-33

СТАЦИОНАРНОЕ ВИНТОВОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ЖИДКОСТИ

Рассматривается ограниченная задача о нахождении многообразия стационарных винтовых движений твердого тела в неограниченной идеальной несжимаемой жидкости. Поверхность, ограничивающая тело, полагается многосвязной. Получены условия устойчивости и равномерной устойчивости данного движения.

Ключевые слова: абсолютно твердое тело; стационарное винтовое движение; идеальная жидкость; устойчивость движения.

Введение

А.М. Ляпуновым [1] был исследован класс стационарных движений твердого тела, происходящих в беспредельной идеальной несжимаемой жидкости, которые он назвал *постоянными винтовыми движениями.* При этом предполагалось, что жидкость покоится на бесконечности, а поверхность, ограничивающая тело, является односвязной.

П.В. Харламов [2] рассматривал уравнения движения твёрдого тела, происходящие в жидкости, для общего случая, при котором поверхность, ограничивающая тело, является многосвязной. Это обобщение позволило существенно расширить класс задач о движении твердого тела в жидкости, а также создать базу для решения задач о нахождении интегрального многообразия системы уравнений движения твердого тела, движущегося вокруг неподвижной точки [3].

В настоящей статье рассматривается задача, относящаяся к проблеме динамики и устойчивости стационарного движения твердого тела, происходящего в идеальной жидкой сплошной среде.

1. Предварительные положения

Рассмотрим движение по инерции абсолютно твердого тела, происходящее в безграничной идеальной несжимаемой жидкости, покоящейся на бесконечности. Предполагается, что поверхность, ограничивающая тело, является многосвязной, а движение тела – стационарное.

Введем правый ортогональный координатный базис $\Gamma(Cx_j)$, неизменно связанный с твердым телом, начало которого совпадает с его центром масс C, а оси совмещены с главными осями эллипсоида импульсивных моментов.

Пусть $\mathbf{P}(P_j)$ – вектор-момент импульсивной силовой пары; $\mathbf{R}(R_j)$ – вектор импульсивной силы; $\mathbf{n}(n_j)$ – некоторый маркировочный вектор, коллинеарный радиусу-вектору, проведенному из центра масс тела в центр масс объема, занимаемого телом; T – величина кинетической энергии тела.

Обозначим

$$\omega_i = \frac{\partial T}{\partial P_i}, \quad u_j = \frac{\partial T}{\partial R_j} \qquad (i,\, j = 1, 2, 3) \tag{1}$$

и введем область задания векторов $\mathbf{P}$ (P_j), $\mathbf{R}$ (R_j), $\mathbf{n}$ (n_j) (j = 1, 2, 3). Согласно принятым предпосылкам уравнения движения твердого тела в проекциях на оси координатного базиса Γ представляются в виде

$$\dot{P}_1 = \omega_3 P_2 - \omega_2 P_3 + (u_3 - n_3)R_2 - (u_2 - n_2)R_3, \tag{2}$$

$$\dot{R}_1 = \omega_3 R_2 - \omega_2 R_3 \qquad (1, 2, 3). \tag{3}$$

Система уравнений (2), (3) аналитически замкнута по переменным P_j, R_j и соответствует частному случаю системы, построенной П.В. Харламовым [2]. Для данной системы имеют место независимые первые алгебраические интегралы

$$V_0(\mathbf{P},\mathbf{R}) \equiv T - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{R}) = h,$$
$$V_1(\mathbf{P},\mathbf{R}) \equiv (\mathbf{P}\cdot\mathbf{R}) = H, \quad V_2(\mathbf{R}) \equiv \left\|\mathbf{R}\right\|^2 = R^2, \tag{4}$$

где h, H, R – постоянные интегрирования. В дальнейшем, принимая нормированное значение, полагаем всюду $R = 1$.

Интеграл энергии V_0 выражает свойство гироскопичности; интеграл V_1 проекции кинетического момента порожден группой симметрий. Интеграл V_2 выражает свойство инвариантности по отношению к действию группы поворотов относительно вектора $\mathbf{R}$, которое порождает векторное поле этой группы.

Из многообразия возможных состояний твердого тела выделим движение, для которого величина T выражается соотношением

$$2T = (\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{A}\mathbf{P}) + (\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{B}\mathbf{R}) + 2c(\mathbf{P}\cdot\mathbf{R}), \tag{5}$$

где $\mathbf{A} = diag\,(a_{11}, a_{22}, a_{33}), \mathbf{B} = diag\,(b_{11}, b_{22}, b_{33})$, причем a_{jj}, b_{jj} $(j = 1, 2, 3)$, c – заданные постоянные.

Представление в форме (5) возможно, в частности, при следующих ограничениях, наложенных на коэффициенты данной квадратичной формы

$$b_{11} - b_{33} = -k\,(a_{11} - a_{33}) \quad (1, 2, 3), \tag{6}$$

выражающих коллинеарность векторов $\mathbf{a}(a_j), \mathbf{b}(b_j)$ $(j = 1, 2, 3)$. Здесь обозначено $a_1 = a_{11} - a_{33}$, $b_1 = b_{11} - b_{33}$ $(1, 2, 3)$, где k – заданный постоянный коэффициент.

В силу выражения (5) интеграл энергии (4) принимает вид

$$V_0(\mathbf{P},\mathbf{R}) \equiv \frac{1}{2}\left[(\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{A}\mathbf{P}) + (\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{B}\mathbf{R})\right] + (c\mathbf{P} - \mathbf{n})\cdot\mathbf{R} = h. \tag{7}$$

2. Многообразие стационарных винтовых движений

Рассматривается вопрос о существовании и свойствах *стационарных винтовых движений* (СВД) твердого тела, образующих многообразие вида

$$(P_j, R_j) = const \qquad (j = 1, 2, 3), \tag{8}$$

соответствующее уравнениям системы (2), (3).

Составим линейную связку первых интегралов (4), (7)

$$V = V_0 - \lambda V_1 - \frac{1}{2}\mu V_2\,, \tag{9}$$

где $\lambda \neq 0$, μ – постоянные множители Лагранжа. Многообразие СВД данного тела определяется системой необходимых условий существования условного экстремума функции V (9), представленным в виде

$$\mathbf{w}(w_j) \equiv \nabla_{\mathbf{P}} V = 0, \qquad \mathbf{v}(v_j) \equiv \nabla_{\mathbf{R}} V = 0, \tag{10}$$

где ∇ – символ оператора Гамильтона, $j = 1, 2, 3$.

Из условий (10) следует

$$w_1 \equiv a_{11} P_1 - \lambda R_1 = 0 \qquad (1, 2, 3), \tag{11}$$

$$v_1 \equiv (\alpha_{11}\lambda^2 - b_{11} + \mu) R_1 + n_1 = 0 \qquad (1, 2, 3). \tag{12}$$

Здесь и всюду далее обозначено $\alpha_{jj} = a_{jj}^{-1}$ ($j = 1, 2, 3$).

Система уравнений (11) характеризует движение твердого тела при значении $\mathbf{P} = |\lambda| \cdot \left\| \mathbf{R}^*(\alpha_{jj} R_j) \right\|$ с инвариантом

$$\left\| \mathbf{P}^*(a_{jj} P_j) \right\|^2 = \lambda^2. \tag{13}$$

Параметризация соотношений (11) с параметром λ допускает представление $\mathbf{P}^*(a_{jj} P_j) = |\lambda| \cdot \mathbf{R}(R_j)$.

Введем (**P**, **R**) – пространство с определенными в нем векторами **P**, **R**, причем **P** – пространство является вложенным в пространство (**P**, **R**). Тогда, согласно соотношению (13), апекс вектора **P** расположен на каноническом эллипсоиде с полуосями $|\alpha_{jj}\lambda|$.

Уравнения системы (12), параметризованные параметром μ, устанавливают ориентацию множества направляющих прямых вектора **R** в связанном координатном ортобазисе. Эти прямые расположены на линейчатой поверхности, определяемой уравнением $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{R}) = 0$, соответствующем конусу второго порядка в **R**-пространстве $c_1 R_2 R_3 + c_2 R_1 R_3 + c_3 R_1 R_2 = 0$, (14)

где обозначено $\quad c_1 = n_1(\alpha_{22} - \alpha_{33}) \qquad (1, 2, 3)$.

Конус (14) вырождается, если, по крайней мере одна из величин a_j, n_i $(i,\ j = 1, 2, 3)$ обращается в ноль.

Полагаем, что векторы **w**, **v**, определяемые равенствами (10), заданы в некотором (**w**, **v**) – пространстве. Тогда уравнения систем (11), (12) можно истолковать как множество *преобразований Лежандра* (ПЛ) [4] вида

$$(\mathbf{P}, \mathbf{R}) \to (\mathbf{w}, \mathbf{v}), \qquad (15)$$

параметризованное величинами λ, μ. В силу этого преобразования многообразие СВД твердого тела в новых переменных определяется равенствами

$$\mathbf{w}(w_j) = 0, \qquad \mathbf{v}(v_j) = 0,$$

представленными уравнениями (11), (12). При этом в исходных переменных преобразование (15) совпадает с ядром данной системы преобразований.

Введем верхнетреугольную матрицу

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ & a_{22} & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ & & a_{33} & 0 & 0 & -\lambda \\ & & & g_1 & 0 & 0 \\ & 0 & & & g_2 & 0 \\ & & & & & g_3 \end{bmatrix},$$

где обозначено $g_j = \alpha_{jj}\lambda^2 + l_j, \quad l_j = \mu - b_{jj} \quad (j = 1, 2, 3).$

Якобиан ПЛ (15), значения которого определяют режимы СВД твёрдого тела, выражается равенством

$$J = \det\ \mathbf{N} = \prod_{j=1}^{3} a_{jj}\, g_j\,. \qquad (16)$$

Согласно равенству (16) имеют место следующие возможные режимы СВД.

1. Значения параметров λ, μ, для которых $J \neq 0$, соответствуют группе невырожденных (регулярных) ПЛ. В этом случае

имеем $rang\ \mathbf{N} = 6$ и ядро ПЛ такое, что точке $w = v = 0$ $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ – пространства соответствует единственная определенная точка (**P**, **R**) – пространства. Данная часть многообразия СВД относится к *стационарному движению* тела с заданными постоянными векторами **P**, **R**.

2. Пусть значения параметров λ, μ такие, что $rang\ \mathbf{N} < 6$, причем в равенстве (16) $g_1 = 0,\ g_2 g_3 \neq 0.$ Тогда компоненты векторов **P**, **R** связаны между собой тремя независимыми уравнениями (11). Эти уравнения совместно с исходными уравнениями движения тела определяют его *регулярные винтовые движения.*

3. Случаи, при которых в равенстве (16) $g_1 \neq 0,\ g_2 g_3 = 0,$ а также когда все $g_j = 0,$ соответствуют (в определенном смысле) состояниям, качественно аналогичным предыдущим.

Следует отметить, что приведенными выше случаями полностью исчерпывается множество существующих возможных режимов СВД твердого тела.

Для дальнейшего вместо постоянных λ, μ введем величины $Q \neq 0,\ \sigma,$ определяемые равенствами

$$Q = \lambda^2 - k, \qquad \sigma = -\,\mu Q^{-1}, \tag{17}$$

где параметр k устанавливается равенством (6).

В силу соотношений связи (17) уравнения системы (12) представимы в виде

$$Q\beta_{11} R_1 + n_1 = 0 \qquad (1, 2, 3), \tag{18}$$

где обозначено $\quad \beta_{jj} = \alpha_{jj} - \sigma \;\; (j = 1, 2, 3).$

Таким образом, для произвольных допустимых значений параметра σ в силу интеграла V_2 (4) из соотношений (18) определяется параметр Q

$$Q^2 = \sum_{j=1}^{3} \left(n_j\, \beta_{jj}^{-1}\right)^2. \tag{19}$$

Следовательно, величина σ является произвольным параметром задачи, полностью определяющим данное СВД тела.

Согласно равенствам (4), (19) получаем

$$R_j = n_j\, (Q\beta_{jj})^{-1} \qquad (j = 1, 2, 3).$$

3. Устойчивость стационарных винтовых движений

Исследование устойчивости СВД тела, приведенное далее, основано на теореме Рауса–Ляпунова [5] и связано с нахождением условий знакоопределенности второй вариации связки интегралов (9) в задаче на условный экстремум.

Рассмотрим вопрос об устойчивости возмущенного движения твердого тела в малой окрестности его стационарного состояния (8), принимая последнее за невозмущенное. Пусть в возмущенном движении $\overline{\mathbf{P}} = \mathbf{P} + \mathbf{p}$, $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} + \mathbf{r}$, где $\mathbf{p}\,(p_j)$, $\mathbf{r}\,(r_j)$ − векторы малых возмущений.

Согласно соотношению (9) образуем вариацию второго порядка

$$2\delta^2 V = \sum_{j=1}^{3} [\alpha_{jj}\,(p_j - 2\lambda\, r_j) p_j + (\alpha_{jj}\lambda^2 - \beta_{jj} Q) r_j^2] \qquad (20)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{3} \alpha_{jj}\,(p_j + \lambda\, r_j) R_j = 0, \qquad (\mathbf{R}\cdot \mathbf{r}) = 0. \qquad (21)$$

Условия (21) представлены с точностью до величин второго порядка малости по отношению к компонентам возмущений **p**, **r.**

Получим условия положительной определённости квадратичной формы (20) с учетом условий (21). Для этого введем новые канонизирующие переменные

$$q_j = p_j - \lambda\, r_j \qquad (j = 1, 2, 3),$$

в которых равенства (20), (21) принимают вид, соответственно

$$2\delta^2 V = \sum_{j=1}^{3} (\alpha_{jj}\, q_j^2 - \beta_{jj}\, Q r_j^2), \qquad (22)$$

$$\sum_{j=1}^{3} \alpha_{jj}\,(q_j + 2\lambda\, r_j) R_j = 0. \qquad (23)$$

К соотношению (23) следует присоединить последнее условие (21), оставленное без изменений.

Полагая $\lambda \neq 0$, введем величины

$$b_j = \alpha_{jj} R_j, \quad \beta_j = 2\lambda b_j, \quad \rho_j = -\beta_{jj} Q \quad (j = 1, 2, 3)$$

и матрицы

$$D_1 = diag\,(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \alpha_{11}), \qquad D_2 = D_3^T,$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_1 & R_1 \\ 0 & 0 & \beta_2 & R_2 \\ 0 & 0 & \beta_3 & R_3 \\ 0 & 0 & b_1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D_4 = \begin{bmatrix} \alpha_{22} & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & \alpha_{33} & b_3 & 0 \\ b_2 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Введем матрицу

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & D_3 \\ D_2 & D_4 \end{bmatrix}, \tag{24}$$

где блочными матрицами $D_j \ (j = 1, \ldots, 4)$ являются приведенные выше матрицы. Путем отбрасывания в матрице D (24) последовательно определенных строк и столбцов получим подматрицы $d_j \ (j = 1, \ldots, 6)$ и соответствующие им определители $I_j = \det d_j \ (j = 1, \ldots, 6)$.

Основываясь на известном аналоге критерия Сильвестра [6], представим условия определенной положительности квадратичной формы (22) при независимых линейных формах (21), (23) в виде

$$I_k > 0 \qquad (k = 3, \ldots, 6). \tag{25}$$

В результате вычислений величин I_k получаем

$$\begin{gathered} I_3 = 4\lambda^2 QF, \qquad I_4 = \alpha_{11}(I_3 + b_1 R_1 \Omega), \\ I_5 = \alpha_{11}\alpha_{22}[I_3 + (b_1 R_1 + b_2 R_2)\Omega], \\ I_6 = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}(I_3 + G\Omega), \end{gathered} \tag{26}$$

где обозначено

$$F = -\sum_j \left\langle \beta_{11} (\beta_{22} - \beta_{33})^2 (R_2 R_3)^2 \right\rangle, \quad \Omega = Q^2 \Phi,$$

$$\Phi = \sum_j \left\langle \beta_{22} \beta_{33} R_1^2 \right\rangle, \quad G = (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{R}) \quad (j = 1, 2, 3), \tag{27}$$

$$\left\| \boldsymbol{\alpha} \right\|^2 \neq 0, \quad \boldsymbol{\alpha} = diag\,(\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}).$$

Здесь и всюду далее символ $\langle \ldots \rangle$ под знаком суммы обозначает сумму по числовому индексу j величин, образуемую путем их суммирования при последовательной циклической перестановке числовых значений индекса j – 1, 2, 3.

Проводя элементарные тождественные преобразования, можно показать, что система условий положительной определённости (25) согласно соотношениям (26), (27) сводится к следующей

$$QF > 0, \quad U = (4\lambda^2 F + GQ\Phi)Q > 0. \tag{28}$$

Эти соотношения позволяют оценить величину параметра σ, введённого согласно равенству (17).

В случаях, при которых знаки величин Q, F заведомо известны, вид каждого из условий (28) можно упростить. В частности, если $Q > 0\ (\lambda^2 > k)$, то условия (28) принимают вид, соответственно,

$$F > 0, \qquad 4\lambda^2 F + GQ\Phi > 0,$$

а при $Q < 0\ (0 < \lambda^2 < k)$ знаки данных неравенств должны быть изменены на противоположные. Если заведомо $G\Phi > 0$, $Q > 0$, то второе из этих условий безусловно выполняется.

Введем ограниченную односвязную область U, определённую в пространстве параметров вторым соотношением (28). Для внутренних точек этой области второе неравенство (28) является как необходимым, так и одним из достаточных условий устойчивости СВД. В результате тождественных преобразований эти ограничения представимы в виде

$$L = \left[\sum_j \left\langle (\alpha_{22} - \alpha_{33})^2 n_1 R_1^{-3} \right\rangle \right] > 0,$$

$$G \sum_j \left\langle n_2 n_3 (R_2 R_3)^{-3} \right\rangle + 4\lambda^2 L > 0 \qquad (29)$$

$$(j = 1, 2, 3).$$

Таким образом, для внутренних точек области U система неравенств (29) выражает условие устойчивости СВД твердого тела в форме, не зависящей от параметров σ, Q, что является удобным для их практического применения.

Следует отметить, что состояние тела (8) при выполнении условий (29) является не только устойчивым, но и *равномерно устойчивым.* Действительно, для системы уравнений (2), (3), отнесённой к области (**P**, **R**) – пространства, являющейся открытым связным множеством, имеет место теорема о равномерной устойчивости состояния [7, с. 20]. Эта устойчивость непосредственно следует из установленной устойчивости СВД как стационарного состояния.

Заключение

Состояние твердого тела, определяемое условиями (8), в общем случае является *регулярным стационарным движением*, соответствующим невырожденному многообразию в фазовом пространстве. Максимальным порождающим интегралом для этого многообразия является линейная связка интегралов (9), которую можно трактовать как некоторое линейное пространство первых интегралов над собственно евклидовом пространством параметров, выбирая данные интегралы за базисные.

Как известно [8], исследование свойств стационарных состояний эффективно проводится на основе теории особенностей отображений. В частности, вопрос об устойчивости этих состояний сводится к исследованию устойчивости особенностей обратимого ПЛ в нуле при возмущениях, происходящих вследствие малого изменения характерной функции данной задачи.

Исследование устойчивости стационарных состояний перспективно с применением более глубоких результатов теории отображений, в частности, теории трансверсальности.

В рассмотренной здесь задаче невырожденное ПЛ обратимо и аналитически устойчиво [8]. В соответствии с этим СВД, удовлетворяющее исходной системе уравнений и соответствующее преобразованию (15), устойчиво (в аналитическом смысле) по отношению к исходным переменным.

Библиографический список

1. *Ляпунов А.М.* О постоянных винтовых движениях твёрдого тела в жидкости // Собр. соч. В 7 т. М.: Изд-во Акад. наук. Т. 1. 1954. 448 с. / Первое изд: Сообщения Харьковского математического Об-ва: Харьков, 1888. 54 с.

2. *Харламов П.В.* О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью // Прикладная механика и техническая физика. 1963, № 4. С. 17−30.

3. *Харламов П.В.* О решениях уравнений динамики твердого тела // Прикладная математика и механика. 1965. Вып. 3. С. 567−572.

4. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 432 с.

5. *Рубановский В.Н., Самсонов В.А.* Устойчивость стационарных движений. М.: Наука, 1988. 304 с.

6. *Кузьмин П.А.* Малые колебания и устойчивость движения. М.: Наука, 1973. 207 с.

7. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.

8. *Арнольд В.И.* Особенности гладких отображений // Успехи математических наук. 1968. Т. 23. Вып. 1(139). С. 3−44.