ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ
Нелинейные динамические системы

Вып. 48 **Межвузовский сборник научных трудов** **2016**

УДК 531.381

Н.Н. Макеев
Институт проблем точной механики
и управления РАН

Россия, 410028, Саратов, ул. Рабочая, 24
nmakeyev@mail.ru; (845) 272-35-33

ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА С НЕГОЛОНОМНОЙ СВЯЗЬЮ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ И ДИССИПАТИВНЫХ СИЛ

Рассматривается ограниченная задача о движении абсолютно твердого тела вокруг неподвижного полюса под воздействием системы гироскопических и диссипативных сил. На тело наложена линейная неголономная связь. Найдены условия существования квадратичного и линейного по скоростям первых интегралов системы уравнений движения твердого тела. Решена задача интегрирования в квадратурах данных уравнений, в результате чего определено движение тела и его ориентация в углах Эйлера.

Ключевые слова: абсолютно твёрдое тело; неголономная связь; гироскопические силы; диссипативные силы.

Введение

В механике управляемого движения законы управления могут быть заданы в виде неинтегрируемых аналитических соотношений, зависящих от скоростей и координат механической системы. Такого рода задание равносильно наложению на систему *неголономных* (неинтегрируемых) связей.

Игнорирование различия между неинтегрируемыми и интегрируемыми соотношениями приводит к нарушению требований точности и устойчивости при реализации законов управления в системах. Примерами таких систем являются гироскопические системы, установленные на подвижном основании, а также программные управляемые системы.

Вклад в развитие динамики неголономных механических систем внес В.В. Вагнер, исследуя в своих работах [1, 2] геометрические свойства неголономных многообразий.

В настоящей работе установлено интегральное неголономное многообразие твердого тела, движущегося относительно неподвижного полюса в поле гироскопических и линейных диссипативных сил с полной диссипацией.

1. Основные предпосылки

Абсолютно твердое тело движется относительно неподвижного полюса O под воздействием системы негравитационных сил.

Введем правые координатные ортобазисы с общим началом в полюсе O: неподвижный (опорный) базис $Z(Oz_1z_2z_3)$, неизменно связанный с инерциальным пространством, и подвижный базис $X(Ox_1x_2x_3)$, оси которого направлены по главным в полюсе O направлениям тензора инерции тела (*главный координатный базис*).

Пусть $\mathbf{s}$ $(s_1,\ s_2,\ s_3)$ − опорный (базовый) орт, неизменно связанный с координатным базисом Z; A_{ij} – элементы матрицы $\mathbf{A}$ тензора инерции тела в полюсе O; $\boldsymbol{\omega}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – абсолютная угловая скорость тела. Здесь и всюду далее координаты всех указанных векторов и элементы матрицы $\mathbf{A}$ отнесены к координатным осям базиса X.

Предполагается, что на твердое тело действует система гироскопических сил с результирующим моментом $\mathbf{L}$ (L_j), определяемым компонентами [3]

$$(L_1, L_2, L_3) = (-k\omega_2, k\omega_1, 0) \tag{1}$$

такими, что для $t \in [0, +\infty) \equiv T$ выполняется условие

$$L_1\omega_1 + L_2\omega_2 = 0,$$

причем $k = const \geq 0$ − заданный гироскопический коэффициент.

Помимо моментно-силового фактора (1) на тело действует система линейных диссипативных сил (сил вязкого трения) с результирующим моментом $\mathbf{M}$ (M_j), компоненты которого [3]

$$(M_1, M_2, M_3) = -\,(c_1\omega_1, c_2\omega_2, c_3\omega_3) \qquad (t \in T), \tag{2}$$

где $c_j = const \geq 0$ $(j = 1, 2)$ − заданные диссипативные коэффициенты (*удельные моменты вязкого трения* [4, с. 368]).

Моментно-силовые воздействия типа (1), (2) имеют место в ряде реальных гироскопических приборов и устройств [4].

Введём неголономную стационарную связь с условием [5]

$$\omega_3 = 0 \qquad (t \in T). \tag{3}$$

Эта связь может быть реализована в механической системе, моделирующей некоторые гироскопические устройства. Схематический пример такого рода устройства в виде аналоговой механической конструкции приведен в источнике [5, с. 127] (*гироскоп В.Вагнера*).

Рассмотрим общий случай конфигурации массы, при котором главные оси инерции в полюсе O занимают произвольную ориентацию в твёрдом теле.

Введем матрицы

$$\mathbf{A} = [A_{ij}] \;\; (i, j = 1, 2), \qquad \mathbf{\Omega} = [\omega_1 \;\; \omega_2], \qquad \mathbf{\Omega}_* = [\omega_2 \;\; -\omega_1],$$
$$\mathbf{L} = [L_1 \;\; L_2], \qquad \mathbf{M} = [M_1 \;\; M_2].$$

Система динамических уравнений тела, составленная при данных предпосылках на основе уравнений П.Аппеля [6, с. 335] с учётом соотношений (1)−(3), имеет вид

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{\Omega}}^T + F(\mathbf{\Omega})\,\mathbf{\Omega}_*^T = \mathbf{L}^T + \mathbf{M}^T, \tag{4}$$

где обозначено

$$F(\Omega) = A_{31}\,\omega_1 + A_{32}\,\omega_2 .$$

К уравнениям (4) следует присоединить кинематические уравнения Пуассона

$$\dot{w} = ius_3, \qquad \dot{s}_3 = \mathrm{Im}\,(u\overline{w}). \tag{5}$$

Здесь обозначено $u = \omega_1 + i\omega_2$, $\quad w = s_1 + is_2$, где i – мнимая единица; черта сверху здесь и всюду далее относится к комплексно сопряженным величинам.

Уравнения (4)–(5) образуют нелинейную многопараметрическую систему, аналитически замкнутую относительно явно входящих в нее переменных.

Система уравнений (4) в проекциях на оси координатного ортобазиса X имеют вид

$$\begin{aligned} A_{11}\dot{\omega}_1 + A_{12}\dot{\omega}_2 + \Phi(\omega_1,\omega_2)\omega_2 + c_1\omega_1 = 0, \\ A_{12}\dot{\omega}_1 + A_{22}\dot{\omega}_2 - \Phi(\omega_1,\omega_2)\omega_1 + c_2\omega_2 = 0 \end{aligned} \qquad (5A)$$

и могут быть приведены к нормальной форме Коши

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 = -D^{-1}[\Phi(\omega_1,\omega_2)F_2(\omega_1,\omega_2) + A_{22}c_1\omega_1 - A_{12}c_2\omega_2], \\ \dot{\omega}_2 = D^{-1}[\Phi(\omega_1,\omega_2)F_1(\omega_1,\omega_2) + A_{12}c_1\omega_1 - A_{11}c_2\omega_2]. \end{aligned} \qquad (6)$$

Здесь обозначено

$$F_1(\omega_1,\omega_2) = A_{11}\omega_1 + A_{12}\omega_2, \quad F_2(\omega_1,\omega_2) = A_{12}\omega_1 + A_{22}\omega_2,$$
$$\Phi(\omega_1,\omega_2) = F(\omega_1,\omega_2) + k,$$

$D = A_{11}A_{22} - A_{12}^2 \ge 0$ − *основная дискриминантная форма* [7]. Случай, при котором $D = 0$, может иметь место для тела, содержащего полости, заполненные жидкостью, или для тела в форме бесконечно тонкой пластинки [8]. Далее эти особые случаи не рассматриваются. В силу этого условие

$$D \ne 0 \qquad (7)$$

далее принимается в качестве *основного базового условия.*

Если, в частном случае, на твердое тело не воздействуют гироскопические и диссипативные силы $(k = c_1 = c_2 = 0)$, то уравнения системы (6) принимают известный вид [5, с. 129].

2. Постановка задачи

Правые части уравнений динамической системы (6) являются функциями класса C^0, определенными на открытом множестве E пространства переменных $(t, \mathbf{\Omega})$, причем $(t_0, \mathbf{\Omega}_0) \in E$. Здесь и всюду далее нулевой индекс соответствует начальному значению данной величины. Эти функции удовлетворяют условиям теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши и непрерывной зависимости решения от времени *t,* заданных начальных значений и параметров для $t \in T$.

Согласно этому ***ставится следующая задача:*** найти условия существования квадратичного и (при слабых ограничениях) линейного по компонентам скоростей первых интегралов системы уравнений (6), а также определить движение твердого тела и его ориентацию относительно опорного координатного базиса для всех значений $t \in T$. □

Движение и ориентация твердого тела определяются путём интегрирования системы уравнений (6) при наличии одного ее первого интеграла.

3. Первые интегралы динамической системы

3.1. *Квадратичный интеграл*

Введем квадратичную форму

$$P(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2}(A_{11}\,\omega_1^2 + A_{22}\,\omega_2^2) + A_{12}\,\omega_1\omega_2\,, \tag{8}$$

определенную на множестве E пространства (t, $\mathbf{\Omega}$). Докажем следующее

Утверждение 1. Для того чтобы квадратичная форма (8) являлась первым интегралом динамической системы (6), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$c_1 = c_2 = 0. \tag{9}$$

Доказательство. *Необходимость*. Дифференцируя по t выражение (8), в силу уравнений (6) получаем тождество по переменным ω_1, ω_2, удовлетворяющееся при условиях (7), (9).

Достаточность. Представим уравнения (6) в виде

$$\dot{\omega}_j = X_j(\omega_1, \omega_2) \qquad (j = 1, 2) \tag{10}$$

и составим комбинацию $F_1 X_1 + F_2 X_2$, являющуюся в силу уравнений (10) интегрируемой при условиях (7), (9). Отсюда следует первый интеграл системы (6) в виде

$$P(\omega_1, \omega_2) = h, \tag{11}$$

где h – постоянная интегрирования. □

Равенство (11) является интегралом энергии динамической системы (6) и не содержит гироскопического параметра k.

3.2. *Линейный интеграл*

Введем линейную форму

$$Q(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 + \lambda\omega_2, \tag{12}$$

где $\lambda \neq 0$ − некоторый числовой коэффициент. Предполагается, что форма (12) определена на заданном открытом множестве E.

Обозначим

$$n_1 = 2A_{12}k + A_{22}c_1 - A_{11}c_2, \quad n_2 = A_{22}k - A_{12}c_2,$$

$$n_3 = A_{11}m_* + A_{12}c_1,$$

$$m_1 = A_{12}A_{32} + A_{22}A_{31}, \qquad m_2 = 2A_{12}A_{31} + A_{11}A_{32}, \tag{13}$$

$$m_3 = 2A_{12}A_{32} + A_{22}A_{31}, \quad m_* = A_{31}H + k,$$

$$U(\lambda) = A_{11}A_{31}\lambda^3 - m_2\lambda^2 + m_3\lambda - A_{22}A_{32}. \tag{14}$$

Здесь H − произвольная постоянная, содержащаяся в равенстве

$$Q(\omega_1, \omega_2) = H \tag{15}$$

в случае инвариантности величины Q (12). Докажем следующее

Утверждение 2. Для того, чтобы форма (12) являлась первым интегралом динамической системы (6), необходимо, чтобы выполнялись условия

$$(n_3\lambda - A_{12}m_* - A_{22}c_1)H = 0, \tag{16}$$

$$\begin{gathered}[A_{11}(m_* - k) + n_3]\lambda^2 - [(A_{12}A_{31} + m_2)H + n_1]\lambda + \\ + m_1H + n_2 = 0,\end{gathered} \tag{17}$$

$$U(\lambda) = 0, \tag{18}$$

где $U(\lambda)$ − полином, определяемый равенством (14).

Доказательство. Если указанный линейный интеграл системы (6) имеет место, то, представляя его в виде (15), выразим из него величину ω_1 и подставим ее выражение в уравнения данной системы. В результате находим два равенства, исключая из которых величину $D\dot{\omega}_2$, получим тождество по переменной ω_2. Это тождество удовлетворяется при условиях (16)−(18). □

В дальнейшем для интеграла (15) рассматривается случай, при котором
$$H = 0 \tag{19}$$
и определяющая система условий (16)−(18) сводится к уравнениям (18) и
$$n_3\lambda^2 - n_1\lambda + n_2 = 0; \tag{20}$$
при этом для дальнейшего полагается $n_2 n_3 \neq 0.$

Простые действительные корни уравнения (20) существуют при условии
$$(A_{11}c_2)^2 + (A_{22}c_1)^2 + 2(A_{12}^2 - D)c_1c_2 - 4Dk^2 > 0. \tag{21}$$
В дальнейшем предполагается выполнение условия (21) (если иное специально не оговорено).

Покажем, что имеют место следующие утверждения.

Утверждение 3. Если значение $\lambda_1 = (A_{11})^{-1}A_{12}$ − корень уравнения (18), то выполняется условие
$$Q_1 \equiv A_{12}A_{31} - A_{11}\ A_{32} = 0. \tag{22}$$

Доказательство. Подставляя выражение для λ_1 в уравнение (18) и группируя слагаемые полученного равенства, в результате, в силу условия (7) получаем ограничение (22).

Утверждение 4. Если значение $\lambda_2 = (A_{12})^{-1}A_{22}$ − корень уравнения (18), то выполняется условие
$$Q_2 \equiv A_{12}A_{32} - A_{22}A_{31} = 0. \tag{23}$$

Доказательство проводится аналогично предыдущему.

Утверждение 5. Система ограничений (22), (23) несовместима.

Доказательство проводится от противного: исключая из данной системы величину A_{31} (или A_{32}), получаем условие $D = 0$, противоречащее базовому условию (7).

Следствия. 1. Корни λ_1, λ_2 уравнения (18) являются *условными корнями* в том смысле, что каждый из них имеет место только при условиях (22) или (23), соответственно.

2. Всегда имеем $\lambda_1 \neq \lambda_2$; в противном случае приходим к ограничению $D = 0$, противоречащему базовому условию (7).

3. Подставляя последовательно выражения для корней λ_1, λ_2 в уравнение (20), получаем, соответственно,
$$(A_{11}k - A_{12}c_1)D = 0, \qquad (A_{22}k + A_{12}c_2)D = 0,$$

откуда в силу условия (7) следуют соотношения связи

$$k = \lambda_1 c_1, \qquad k = -(\lambda_2)^{-1} c_2.$$

Утверждение 6. Значение $\lambda_3 = (A_{31})^{-1} A_{32}$ является безусловным корнем уравнения (18).

Доказательство проводится непосредственной подстановкой значения λ_3 в данное уравнение.

Следствия. 1. Если $\lambda = \lambda_3$, то первый линейный интеграл (15) при условии (19) принимает вид

$$A_{31}\omega_1 + A_{32}\omega_2 = 0.$$

2. Подставляя значение корня λ_3 в уравнение (20), имеем

$$(A_{32}k + A_{31}c_2)Q_1 + (A_{31}k - A_{32}c_1)Q_2 = 0. \qquad (24)$$

3. Составив линейную комбинацию $K = D(\omega_1 + \lambda\omega_2)$, в силу уравнений системы (6) при $\lambda = \lambda_3$ получаем

$$\dot{K} = (A_{31})^{-1}[(c_2\omega_2 - \Phi\omega_1)Q_1 + (\Phi\omega_2 + c_1\omega_1)Q_2]. \qquad (25)$$

В соотношениях (24), (25) Q_1, Q_2 определяются по (22), (23).

4. Интегрирование динамической системы

4.1. *Определение движения твердого тела*

В дальнейшем применяется интеграл (15) при условии (19) в виде

$$\omega_1 + \lambda\omega_2 = 0. \qquad (25A)$$

В силу интеграла (25A) из второго уравнения (6) следует

$$\dot{\omega}_2 = D^{-1}(N_2\omega_2 + N_1)\omega_2, \qquad (26)$$

где обозначено

$$N_1 = k(A_{12} - A_{11}\lambda) - (A_{11}c_2 + A_{12}\lambda c_1),$$

$$N_2 = A_{11}A_{31}\lambda^2 - P_*\lambda + A_{12}A_{32},$$

$$P_* = A_{11}A_{32} + A_{12}A_{31}.$$

В дальнейшем для общего случая принято $N_1 N_2 \neq 0$.

Интегрируя уравнение (26), получаем

$$\omega_2 = \frac{n \exp \sigma t}{1 - N_2 G \exp \sigma t}, \qquad (27)$$

где обозначено

$$n = N_1 G, \quad G = \omega_2^0 (N_2 \omega_2^0 + N_1)^{-1}, \quad \sigma = D^{-1} N_1,$$

причем для ω_2^0 имеем ограничения

$$\omega_2^0 \neq 0, \qquad \omega_2^0 \neq -N_1 (N_2)^{-1} = \nu_*.$$

Характер изменения величины $\omega_2(t)$ при $t \to +\infty$ определяется знаком параметра σ или, в итоге, знаком постоянной N_1. Если $N_1 > 0$, то $\omega_2(t) \to -\nu_*$ при $t \to +\infty$. В случае, при котором $N_1 < 0$, имеем $\omega_2(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Пусть, в частности, $\lambda = \lambda_1$. Тогда

$$N_1 = -(A_{11})^{-1}(A_{11}^2 c_2 + A_{12}^2 c_1) < 0, \quad N_2 = 0$$

и вместо соотношения (27) получаем

$$\omega_2 = n \exp \sigma t. \tag{28}$$

Для значения $\lambda = \lambda_2$ находим

$$N_1 = -[(A_{12})^{-1} kD + A_{11} c_2 + A_{22} c_1] < 0, \qquad N_2 = 0,$$

причем $N_2 = 0$ имеет место в силу условий (7), (23) и справедливо соотношение (28), а $\omega_1(t)$ определяется согласно (25А).

4.2. *Определение ориентации твердого тела*

Введем комплексные переменные Дарбу [9]

$$z = \frac{w}{1 - s_3} = \frac{1 + s_3}{\overline{w}}, \qquad \overline{z} = \frac{\overline{w}}{1 - s_3} = \frac{1 + s_3}{w}, \tag{29}$$

где обозначено $w = s_1 + i s_2$, $\overline{w} = s_1 - i s_2$.

Переменная z в равенствах (29) является координатой точки экваториальной плоскости сферы Римана, стереографическая проекция которой на эту сферу имеет координаты s_1, s_2, s_3 [10], удовлетворяющие тождеству

$$\|\mathbf{s}\|^2 = 1. \tag{30}$$

Из системы уравнений (5) в силу соотношений (29), (30) следует уравнение Дарбу–Риккати [11; 12, с. 130]

$$2\dot{z} = i(\overline{u} z^2 - u). \tag{31}$$

Введем новую независимую переменную τ согласно соотношению

$$\tau = n\,(2\sigma)^{-1}(e^{\sigma t} - 1) \tag{32}$$

и приведем уравнение (31) к виду

$$z' = \overline{\mu}\, z^2 + \mu, \tag{33}$$

где обозначено $\mu = 1 + i\lambda$, $\overline{\mu} = 1 - i\lambda$; штрих обозначает дифференцирование по τ.

Интегрируя уравнение (33), в результате получаем

$$z(\tau) = \mu\,\rho^{-1}\mathrm{tg}\,(\rho\tau + \alpha). \tag{34}$$

Здесь $\rho = |\mu| = \sqrt{1 + \lambda^2}$, а постоянная α определяется равенством $\mathrm{tg}\alpha = \rho^{-1}\overline{\mu}z^0$, $z^0 = z(0)$, которое при $s_3^0 \neq 1$ может быть приведено к виду

$$\mathrm{tg}\,\alpha = a^{-1}(\nu_1 + i\nu_2), \quad a = (1 - s_3^0)\,\rho, \tag{35}$$

где обозначено $\nu_1 = s_1^0 + \lambda s_2^0$, $\nu_2 = s_2^0 - \lambda s_1^0$.

Положим

$$\begin{gathered} f_1(\tau) = \nu_1 + a\,\mathrm{tg}\,\rho\tau, \quad f_2(\tau) = a - \nu_1\,\mathrm{tg}\,\rho\tau, \\ R_*(\tau) = [f_2(\tau)]^2 + (\nu_2\,\mathrm{tg}\,\rho\tau)^2, \\ R_1(\tau) = f_1(\tau)\,f_2(\tau) - \nu_2^2\,\mathrm{tg}\,\rho\tau, \\ R_2(\tau) = \nu_2[f_1(\tau)\,\mathrm{tg}\,\rho\tau + f_2(\tau)]. \end{gathered} \tag{36}$$

Решение (34) в обозначениях (35), (36) представимо в виде

$$z(\tau) = \frac{\Phi_1(\tau) + i\Phi_2(\tau)}{\rho R_*(\tau)}, \tag{37}$$

где обозначено $\Phi_1(\tau) = R_1(\tau) - \lambda R_2(\tau), \Phi_2(\tau) = R_2(\tau) + \lambda R_1(\tau)$.

Обращая зависимости (29), в результате получаем [12]

$$(s_1, s_2, s_3) = (\bar{z} + z,\, i(\bar{z} - z),\, z\bar{z} - 1)\zeta^{-1}, \tag{38}$$

где обозначено $\zeta = z\bar{z} + 1$.

Применяя соотношение (37), из равенств (38) находим

$$\begin{gathered} w(\tau) = 2\frac{R_*^2}{R^2}\,z(\tau), \\ s_3(\tau) = (R_1^2 + R_2^2 - R_*^2)\,R^{-2}, \end{gathered} \tag{39}$$

где обозначено $$R^2 = R_1^2 + R_2^2 + R_*^2.$$

Соотношения для s_j (τ) (39) удовлетворяют тождеству (30).

Выберем систему ориентирования тела так, чтобы базовый орт $\mathbf{s}$ (s_j) в базисе X определялся координатами [13]

$$(s_1, s_2, s_3) = (\sin\theta \sin\varphi,\ \sin\theta \cos\varphi,\ \cos\theta) \qquad (0 < \theta < \pi). \tag{40}$$

Согласно представлению (40) имеем

$$\operatorname{tg}\varphi(\tau) = \frac{s_1}{s_2}, \quad \cos\theta(\tau) = s_3, \tag{41}$$

где s_3 (τ) определяется равенством (39). Обращенное кинематическое уравнение Эйлера для $\dot\psi$ будет

$$\dot\psi = (\sin\theta)^{-1}(\omega_1 \sin\varphi + \omega_2 \cos\varphi). \tag{42}$$

Из равенств (32), (39), (41), (42) и (25A) получаем

$$\operatorname{tg}\varphi(\tau) = \frac{\Phi_1(\tau)}{\Phi_2(\tau)}, \qquad \cos\theta(\tau) = (R_1^2 + R_2^2 - R_*^2)\frac{1}{R^2}, \tag{43}$$

$$\psi(\tau) = \psi^0 + 2\int_0^\tau \frac{(\cos\varphi - \lambda\sin\varphi)\omega_2}{(n + 2\sigma\xi)\sin\theta}\, d\xi. \tag{44}$$

Таким образом, квадратуры (43), (44) полностью определяют ориентацию твердого тела в зависимости от переменной τ, зависящей от натурального времени t согласно (32).

5. Частные случаи интегрирования

5.1. *Ось Ox_1 − главная ось инерции тела*

В этом случае $A_{12} = A_{31} = 0$ и из системы (5A) в силу интеграла (25A) получаем

$$A_{22}\dot\omega_2 + b\omega_2^2 + p\omega_2 = 0, \tag{45}$$

где $b = A_{32}\lambda$, $p = k\lambda + c_2 \ge 0$. Здесь имеем $p = 0$ при $\lambda = \lambda_2$.

Интегрируя уравнение (45) при $p \ne 0$, получаем

$$\omega_2(t) = \frac{pPe^{-\beta t}}{b(1 - Pe^{-\beta t})}, \tag{46}$$

где обозначено $P = b\omega_2^0(b\omega_2^0 + p)^{-1}$, $\quad \beta = (A_{22})^{-1}p > 0$.

Согласно равенству (46) имеем $\omega_2(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Из уравнения (45) при $p = 0$, $\omega_2^0 \neq 0$ получаем

$$\omega_2(t) = \omega_2^0 (1 + \lambda \mu \omega_2^0 t)^{-1}, \qquad \mu = (A_{22})^{-1} A_{32}. \tag{47}$$

Из равенства (47) следует, что $\omega_2(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Это же свойство относится и к функции $\omega_1(t)$ для (46) и (47).

5.2. *Три оси являются главными осями инерции тела*

В этом случае $A_{12} = A_{31} = A_{32} = 0$ и из системы (5А) может быть выделено уравнение

$$a_2 \ddot{\omega}_1 + a_1 \dot{\omega}_1 + a_0 \omega_1 = 0, \tag{48}$$

где положительные коэффициенты

$$a_2 = A_{11} A_{22}, \quad a_1 = A_{11} c_2 + A_{22} c_1, \quad a_0 = k^2 + c_1 c_2.$$

Решение уравнения (48), соответствующее начальным условиям $\omega_1(0) = \omega_1^0$, $\dot{\omega}_1(0) = \dot{\omega}_1^0$, имеет вид

при $\delta > 0$ $$\omega_1(t) = B_1 \exp(\mu_1 t) + B_2 \exp(\mu_2 t), \tag{49}$$

где обозначено

$$(B_1, B_2) = a_2 \delta^{-1/2} (\mu_2 \omega_1^0 - \dot{\omega}_1^0, \dot{\omega}_1^0 - \mu_1 \omega_1^0),$$

μ_1, μ_2 – корни характеристического уравнения, соответствующего уравнению (48)

$$(\mu_1, \mu_2) = (2a_2)^{-1}(-a_1 \mp \sqrt{\delta}) < 0,$$

$$\delta = (A_{11} c_2 - A_{22} c_1)^2 - 4 a_2 k^2 > 0;$$

при $\delta < 0$ $$\omega_1(\tau) = (C_1 \cos mt + C_2 \sin mt) \exp(\nu t), \tag{50}$$

где обозначено

$$C_1 = \omega_1^0, \qquad C_2 = m^{-1} (\dot{\omega}_1^0 - \nu \omega_1^0),$$

$$\nu = -(2a_2)^{-1} a_1 < 0, \qquad m = (2a_2)^{-1} \sqrt{-\delta}.$$

Случай, при котором $\delta = 0$, здесь не рассматривается.

Движение тела в режимах (49), (50) обладает свойством $\omega_1(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Это же свойство распространяется и на зависимость $\omega_2(t)$.

Заключение

Решение поставленной задачи получено в сравнительно не сложных аналитических выражениях по сравнению с известным решением аналогичной задачи, рассмотренной для менее общего случая [5, с. 128−138]. В цитированной частной задаче на твёрдое тело не воздействуют гироскопические и диссипативные силы, а аналитическое решение, сведенное к P-уравнению Римана, получено в гипергеометрических функциях.

Простота формы полученного решения обусловлена применением однородного линейного первого интеграла при условии его существования. Если это условие выполняется, то профили скоростей $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ тела обладают групповым свойством гомотетичности с заданным центром и коэффициентом гомотетии $g = -\lambda \neq 0$.

Общим характерным свойством полученных здесь решений $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ является идентичность их асимптотических профилей: $(\omega_1, \omega_2) \to 0$ при $t \to +\infty$. Этот результат является естественным в условиях воздействия на тело системы диссипативных сил. При этом вклад гироскопического фактора в проявление этого характерного свойства не является определяющим.

Задание неголономной связи явным уравнением можно трактовать как аналитическое задание *программы движения* твёрдого тела. Реализация этого программного движения в общем случае достигается применением *сервомеханизмов* [14].

Библиографический список

1. *Вагнер В.В.* Геометрия пространства конфигураций твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки // Учен. зап. Саратов. ун-та. Серия физ.-мат. наук. 1938. Т. 2(14). С.34−59.

2. *Вагнер В.В.* Геометрическая интерпретация движения неголономных динамических систем // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М.; Л.: ОГИЗ, 1941. Вып. 5. С.301−327.

3. *Румянцев В.В.* Две задачи о стабилизации движения // Механика твердого тела. 1975, № 5. С. 5−12.

4. *Магнус К.* Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974. 528 с.

5. *Добронравов В.В.* Основы механики неголономных систем. М.: Высшая школа, 1970. 272 с.

6. *Аппель П.* Теоретическая механика / пер. с франц. М.: Физматлит. Т. 2. 1960. 488 с.

7. *Виттенбург Й.* Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1980. 294 с.

8. *Харламова Е.И.* Некоторые решения задачи о движении тела, имеющего закрепленную точку // Прикладная математика и механика. 1965. Вып. 4. С. 733−737.

9. *Darboux G.* Lecons sur la theorie generale des surfaces. Paris: Gauthier-Villars, 1887. Vol. 1, chap. 2.

10. *Привалов И.И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1984. 432 с.

11. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики / пер. с итал. М.; Л.: ОНТИ. Т. 1, ч. 1, 1935. 385 с.

12. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматлит, 1961. 824 с.

13. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика. М.;Л.: ГИТТЛ, 1946. 655 с.

14. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1964. 478 с.