ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ
Нелинейные динамические системы

Вып. 48 **Межвузовский сборник научных трудов** **2016**

УДК 521:629.78

Е.Н. Остапенко, Н.А. Репьях

Пермский государственный национальный исследовательский университет

Россия, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15
8 (342) 2-396-309

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ ДВИЖЕНИЯ ИСКУССТВЕННОГО НЕБЕСНОГО ТЕЛА В ТЕНИ ЗЕМЛИ ПРИ ВЕРТИКАЛЬНОМ СТАРТЕ

При выборе орбит спутников Земли часто накладываются ограничения на продолжительность пребывания их в тени Земли. В свою очередь продолжительность затмения определяется начальными условиями запуска. В настоящей работе участки затмения орбиты получены для случая вертикального старта искусственного небесного тела.

Ключевые слова: искусственное небесное тело; спутник Земли; тень Земли; сферическая тригонометрия; полюс мира; углы Эйлера-Крылова.

Учитывая изменение ориентации оси цилиндрической тени Земли в плоскости эклиптики в зависимости от движения Земли вокруг Солнца и изменение положения местной вертикали *OH* (рис. 1) относительно оси мира *OP* становится необходимым установление всех параметров, определяющих положение плоскостей орбит вертикального старта, которые пересекают область тени и определяют время нахождения искусственного небесного тела (ИНТ) в тени Земли.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14–01–96019).

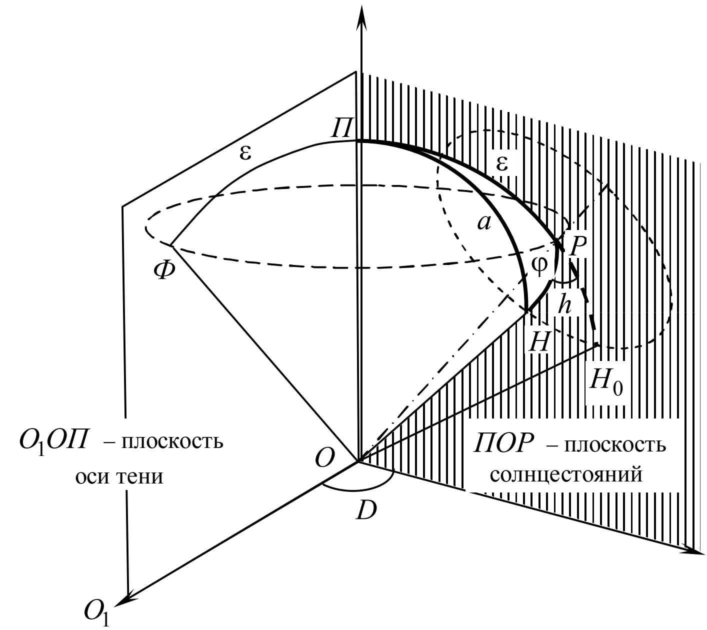

Рис. 1

На рис. 1 приведены сферические треугольники и их элементы, связывающие геометрические и временные величины для нахождения $\angle O_1OH$ между осью тени и местной вертикалью точки запуска ИНТ, O – центр Земли, OO_1 – ось тени Земли, D – угол между осью тени и плоскостью солнцестояний, зависящий от даты старта.

В подвижном пространстве, связанном с плоскостью оси тени $O_1OП$, ось мира OP опишет конус с углом раствора 2ε, где ε – угол наклона плоскости эклиптики к плоскости небесного экватора, $OП$ – ось конуса. Дуга $ФП = \varepsilon$ лежит в плоскости оси тени $O_1OП$. Будем предполагать, что угол D отсчитывается от плоскости солнцестояний $OПP$.

Местная вертикаль OH в течение суток описывает, вращаясь вокруг оси мира OP, конус с углом раствора 2φ, где φ – зенитное расстояние полюса мира P на широте места старта.

Положение местной вертикали в текущий момент времени определяется часовым углом h, отсчитываемым от плоскости солнцестояний до плоскости круга склонений точки зенита в месте старта.

Для определения угла между местной вертикалью OH и осью тени OO_1 рассмотрим сферический треугольник $Р\Pi H$ и его элементы (рис. 2): стороны ε, φ, a, угол X, угол $\tau = \pi - h$. Величины $\varepsilon, \varphi, h, \tau$ известны, они позволяют определить сторону a и угол X.

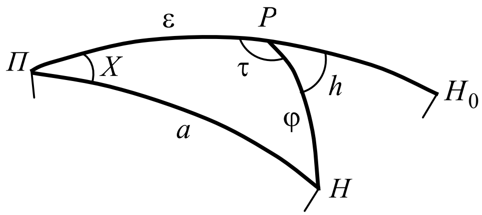

Рис. 2

Используя формулы сферической тригонометрии [3, 4, 8], связывающие между собой три стороны и угол, можно записать:

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos\varepsilon\cdot\cos\varphi + \sin\varepsilon\cdot\sin\varphi\cdot\cos\tau = \\ &= \cos\varepsilon\cdot\cos\varphi - \sin\varepsilon\cdot\sin\varphi\cdot\cos h, \end{aligned} \tag{1}$$

Аналогично определяем косинус φ

$$\cos\varphi = \cos a\cdot\cos\varepsilon + \sin a\cdot\sin\varepsilon\cdot\cos X\ . \tag{2}$$

Из равенства (2) с учетом (1) получаем

$$\cos X = \frac{\cos\varphi\cdot\sin\varepsilon + \cos\varepsilon\cdot\sin\varphi\cdot\cos h}{\sin a}\ . \tag{3}$$

Выражения (1), (2), (3) позволяют найти проекции радиус-вектора $OH = \{x_H, y_H, z_H\}$ в геоцентрической эклиптической прямоугольной системе координат $Oxyz$ (рис. 3). Ось Ox направлена в точку весеннего равноденствия, ось Oz совпадает с направлением на полюс эклиптики Π, xOy – плоскость эклиптики, $OH = R$, где R – радиус Земли, т.е. предполагается, что сферический треугольник ΠPH – это треугольник на сферической поверхности Земли.

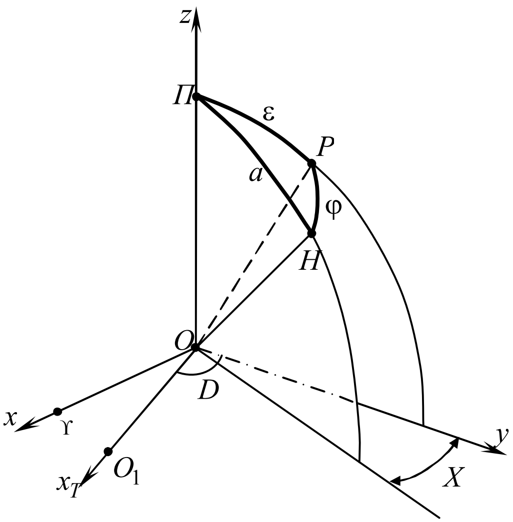

Рис. 3

Имеем:

$$\begin{cases} x_H = R \cdot \sin a \cdot \sin X, \\ y_H = R \cdot \sin a \cdot \cos X, \\ z_H = R \cdot \cos a. \end{cases} \tag{4}$$

Единичный вектор $\vec{e}^{\,0}$ оси тени Земли OO_1 имеет проекции

$$\begin{cases} e_x = \sin D, \\ e_y = \cos D, \\ e_z = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Тогда $\angle O_1OH = \alpha$ с учетом (4) и (5) определяется из равенства

$$\cos\alpha = \sin a \cdot \cos\left(D - X\right). \tag{6}$$

Плоскости вертикального старта могут быть определены азимутом $Аз$ в горизонтальной геоцентрической системе координат $Ox^*y^*z^*$ (рис. 4). Здесь Ox^*y^* – плоскость местного горизонта, ось Oy^* направлена на юг S, азимут $Аз$ отсчитывается от оси Oy^* в плоскости Ox^*y^* к направлению на запад, на ось Ox^*.

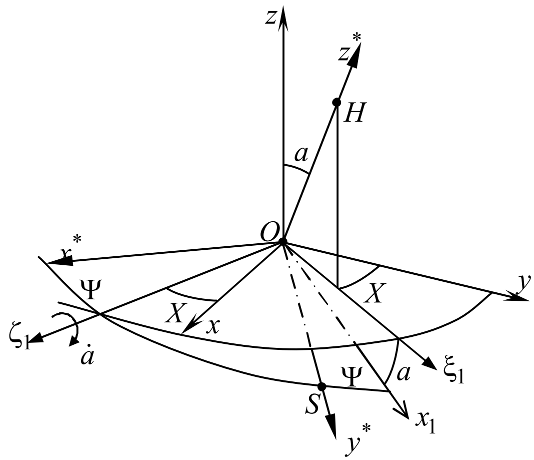

Рис. 4

Для задания плоскостей вертикального старта с фиксированным значением азимута в геоцентрической эклиптической системе $Oxyz$ рассмотрим связь между системами $Oxyz$ и $Ox^*y^*z^*$. Эта связь задается углами Эйлера–Крылова a, X, Ψ (рис. 4) [2, 5, 6].

Переход от эклиптической системы $Oxyz$ к горизонтальной системе $Ox^*y^*z^*$ можно осуществить следующими поворотами:

1) поворот системы $Oxyz$ вокруг оси Oz на угол X, при этом система координатных осей $Oxyz$ перейдет в положение $O\varsigma_1\xi_1 z$ согласно преобразованию

$$\left(\varsigma_1, \xi_1, z\right)^T = A_X \left(x, y, z\right)^T, \qquad (7)$$

где матрица преобразования имеет вид

$$A_X = \begin{bmatrix} \cos X & -\sin X & 0 \\ \sin X & \cos X & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad (8)$$

2) поворот системы $O\varsigma_1\xi_1 z$ вокруг линии узлов $O\varsigma_1$ на $\angle a$, здесь a – угловое расстояние вертикали OH от полюса эклиптики $O\Pi$ (рис. 3), этому повороту соответствует преобразование

$$\left(\varsigma_1, x_{1,} z^*\right)^T = A_a\left(\varsigma_1, \xi_1, z\right)^T \tag{9}$$

с матрицей

$$A_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & -\sin a \\ 0 & \sin a & \cos a \end{bmatrix}; \tag{10}$$

3) и последний поворот системы $O\varsigma_1, x_1, z^*$ на $\angle\Psi$ вокруг вертикали OH до совпадения с осями $Ox^* y^* z^*$

$$\left(x^*, y^*, z^*\right)^T = A_\Psi\left(\varsigma_1, x_1 z^*\right)^T, \tag{11}$$

где матрица преобразования

$$A_\Psi = \begin{bmatrix} \cos\Psi & -\sin\Psi & 0 \\ \sin\Psi & \cos\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

угол Ψ соответствует азимуту полюса эклиптики Π в момент старта.

В результате последовательного применения линейных преобразований (7), (9), (11) получается также линейное преобразование, матрица которого является произведением матриц (8), (10), (12).

Следовательно, матрица A преобразования

$$\left[x^*, y^*, z^*\right]^T = A\left[x, y, z\right]^T \tag{13}$$

имеет вид

$$A = \left(A_{ij}\right) = A_\Psi \cdot A_a \cdot A_X \quad \left(i, j = 1, 2, 3\right). \tag{14}$$

Тогда элементы матрицы A_{ij}, выраженные через углы $\angle a$, X, Ψ определяются следующим образом:

$$\begin{cases} A_{11} = \cos\Psi \cdot \cos \mathrm{X} - \sin\Psi \cdot \sin X \cdot \cos a, \\ A_{12} = -\cos\Psi \cdot \sin X - \sin\Psi \cdot \cos X \cdot \cos a, \\ A_{13} = \sin\Psi \cdot \sin a, \\ A_{21} = \sin\Psi \cdot \cos X + \cos\Psi \cdot \sin X \cdot \cos a, \\ A_{22} = -\sin\Psi \cdot \sin X + \cos\Psi \cdot \cos X \cdot \cos a, \\ A_{23} = -\cos\Psi \cdot \sin a, \\ A_{31} = \sin a \cdot \sin X, \\ A_{32} = \sin a \cdot \cos X, \\ A_{33} = \cos a. \end{cases} \quad (15)$$

Плоскость вертикального старта, соответствующая фиксированному значению $Аз$, может быть определена в осях системы $Ox^* y^* z^*$ уравнением

$$x^* \sin Аз - y^* \cos Аз = 0, \quad (16)$$

как уравнением плоскости, проходящей через ось Oz^*.

Для установления зависимостей между параметрами плоскости (16) и параметрами тени Земли выполним еще одно преобразование, связывающее систему $Oxyz$ с "теневой" системой $Ox_T y_T z_T$.

В "теневой" системе координат ось Ox_T направлена по оси тени OO_1 (рис. 3), ось Oz_T направлена на полюс эклиптики, ось Oy_T дополняет систему осей Ox_T, Oy_T, Oz_T до правой.

Соответственно этому преобразованию

$$\begin{cases} x = x_T \sin D - y_T \cos D, \\ y = x_T \cos D + y_T \sin D, \\ z = z_T. \end{cases} \quad (17)$$

Выполнив в уравнении (16) преобразование (13), а затем (17), получим уравнение плоскости вертикального старта в осях "теневой" системы координат $A_T x_T + B_T y_T + C_T z_T = 0$, (18)
где коэффициенты A_T, B_T, C_T зависят от широты места, времени и направления запуска ИНТ.

В этих же координатах уравнение границы цилиндрической области тени Земли имеет вид:

$$y_T^2 + z_T^2 - R^2 = 0\,. \qquad (19)$$

Уравнения (18), (19) позволяют определить большую полуось Φ эллипса тени как решение задачи математического программирования

$$\begin{cases} \Phi^2 \to extr, \\ \Phi^2 = x_T^2 + y_T^2 + z_T^2 \end{cases} \qquad (20)$$

при ограничениях (18), (19).

В результате для большой полуоси Φ эллипса тени имеем значение

$$\Phi = \frac{R}{A_T}\sqrt{A_T^2 + B_T^2 + C_T^2}\,. \qquad (21)$$

Очевидно, малая полуось эллипса тени F будет равна радиусу Земли R

$$F = R\,. \qquad (22)$$

В плоскости (16) область затененного участка представляет собой внутреннюю часть эллипса тени

$$\frac{\xi^2}{\Phi^2} + \frac{\eta^2}{F^2} = 1\,, \qquad (23)$$

соответственно, время нахождения ИНТ в тени Земли определяется величиной дуги орбиты MN либо M_1N_1 в зависимости от условий старта, т.е. координатами точек M, N, ... (рис. 5).

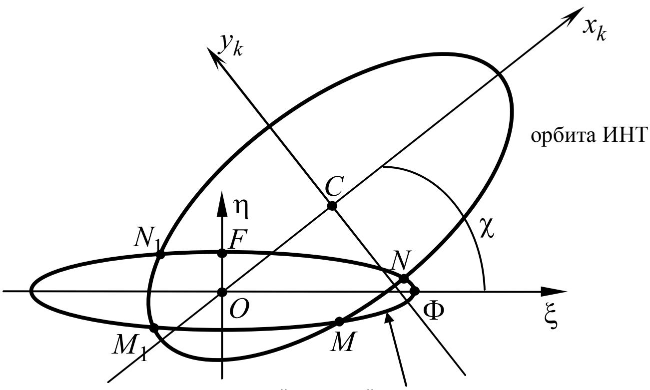

Рис. 5

На рис. 5 точка O – гравитационный центр, он же – фокус орбиты вертикального запуска, точка C – геометрический центр орбиты, отрезок OC лежит на линии апсид, $OC = c$ – фокусное расстояние эллиптической орбиты.

В полярных координатах уравнение Кеплеровой орбиты имеет вид:

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\nu}, \tag{24}$$

где $r = OM$ – текущее расстояние ИНТ до гравитационного центра; угол ν – истинная аномалия ИНТ, измеряется от направления на перигей; p – параметр эллипса; e – эксцентриситет эллипса. Значения постоянных p, ε, χ определяются начальными условиями, причем угол χ задает ориентацию линии апсид эллипса тени (23) относительно большой оси эллипса тени (24) (рис. 5) [1, 6, 8].

Каноническое уравнение эллипса (24) в «канонических» осях системы $Cx_k y_k$ имеет вид

$$\frac{x_k^2}{a_k^2} + \frac{y_k^2}{b_k^2} = 1, \tag{25}$$

где a_k и b_k – большая и малая полуоси орбиты, зависящие от параметров p и e:

$$\begin{cases} a_k = \dfrac{p}{1 - e^2}, \\ b_k = \dfrac{p}{\sqrt{1 - e^2}}. \end{cases} \tag{26}$$

С учетом (26) уравнение эллипса (25) запишется в виде

$$x_k^2 \left(1 - e^2\right)^2 + y_k^2 \left(1 - e^2\right) = p^2. \tag{27}$$

Для определения координат точек M, N, M_1, N_1 в уравнении (27) учтем связь координат $\left(x_k, y_k\right)$ с координатами $\left(\xi, \eta\right)$

$$\begin{cases} x_k = \xi\cos\chi + \eta\sin\chi - C, \\ y_k = -\xi\sin\chi + \eta\cos\chi, \end{cases} \tag{28}$$

где $C = \dfrac{pe}{1 - e^2}$.

Тогда координаты (ξ_i, η_i) точек пересечения эллипсов (23), (24) найдутся как решение системы уравнений (23), (27), (28).

В переменных ξ, η уравнение (27) примет вид

$$a_1\xi^2 + a_2\eta^2 - a_3\xi\eta - a_4\xi - a_5\eta + a_6 = 0. \tag{29}$$

где $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ определяются следующим образом

$$\begin{cases} a_1 = 1 - e^2\cos^2\chi, & a_2 = 1 - e^2\sin^2\chi, \\ a_3 = e^2\sin 2\chi, & a_4 = 2\left(1-e^2\right)c\cdot\cos\chi, \\ a_5 = 2c\left(1-e^2\right)\sin\chi, & a_6 = c^2\left(1-e^2\right) - \dfrac{p^2}{1-e^2}. \end{cases} \tag{30}$$

Для соосных эллипсов (23), (24) $\angle\chi = 0$, тогда $a_1 = 1 - e^2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$, $a_4 = 2\left(1-e^2\right)$, $a_5 = 0$ и уравнение (29) упростится:

$$\xi^2 + \frac{\eta^2}{1-e^2} - 2c\xi + c^2 - \frac{p^2}{\left(1-e^2\right)^2} = 0. \tag{31}$$

В случае, когда большие полуоси эллипсов (23), (24) ортогональны, уравнение (29) запишется в виде:

$$\frac{\xi^2}{1-e^2} + \eta^2 - 2c\eta + c^2 - \frac{p^2}{\left(1-e^2\right)^2} = 0. \tag{32}$$

Для совместного решения уравнений (23) и (27) уравнение эллипса (23) удобнее записать в параметрическом виде

$$\begin{cases} \xi = \Phi\cos\gamma, \\ \eta = F\sin\gamma. \end{cases} \tag{33}$$

Подстановка соотношений (33) в уравнение орбиты (29) приводит к уравнению для параметра γ, который определит координаты (ξ_i, η_i) точек пересечения границы области тени с орбитой ИНТ.

В случае круговой орбиты ИНТ точки пересечения M, N, M_1, N_1 находят аналогично [6, 7, 8].

Библиографический список

1. *Белецкий В.В.* Очерки о движении космических тел. М.: Наука, 1972. 360 с.

2. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992. 280 с.

3. *Воронцов-Вельяминов Б.А.* Сборник задач и упражнений по астрономии. М.: Физматгиз, 1963. 280 с.

4. *Ганьшин В.Н.* Геометрия земного эллипсоида. М.: Изд-во "Недра", 1967. 116 с.

5. *Матвеев В.В.* Основы построения бесплатформенных инерциальных систем. СПб: ГНЦ РФ ОАО "Концерн "ЦНИИ Электроприбор", 2009. 280 с.

6. Основы теории полета космических аппаратов / под ред. *Г.С. Нариманова, М.К. Тихонравова.* М.: Машиностроение. 1972. 608 с.

7. *Репьях Н.А., Остапенко Е.Н.* Время нахождения искусственного спутника Земли в области тени Земли для полярных круговых орбит // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. Пермь, 2015. Вып. 47. С. 96–101.

8. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / под ред. Г.Н. Дубошина. М.: Наука, 1976. 864 с.