

УДК 531.3

Е.Л. Тарунин

*Пермский государственный национальный  
исследовательский университет*

Россия, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15  
8 (342) 2-396-409

## КОРРЕКЦИЯ СИЛЫ КУЛОНОВСКОГО ОТТАЛКИВАНИЯ ОДНОИМЕННО ЗАРЯЖЕННЫХ ШАРОВ НА БЛИЗКИХ РАССТОЯНИЯХ

*Сила взаимодействия заряженных проводников на близких расстояниях существенно отличается от закона Кулона, сформулированного для точечных зарядов. Исследование этого отличия для проводящих сфер было подробно выполнено в работах [1–3, 5, 10]. Статья является продолжением статьи [10], в которой была найдена приближенная зависимость критического расстояния между центрами сфер  $L^*$ , при котором происходит смена силы отталкивания на силу притяжения, от радиуса большого шара  $R_2$ . Уточнена зависимость  $L_*(R_2)$  для одинаковых зарядов и показано влияние отношения зарядов на критическое значение  $L^*$ . Показано согласие результатов расчета с известными предельными случаями из электростатики о взаимодействии точечного заряда с плоскостью и проводящей сферой*

**Ключевые слова:** электростатика; уравнение Лапласа; метод Робена.

### 1. Постановка задачи

Счет выполнялся с использованием уравнения Лапласа, записанного в цилиндрической системе координат. Геометрия расчетной области изображена на рис. 1. Расчеты выполнялись с учетом осевой симметрии. Поэтому на рисунке изображено лишь сечение половины области.

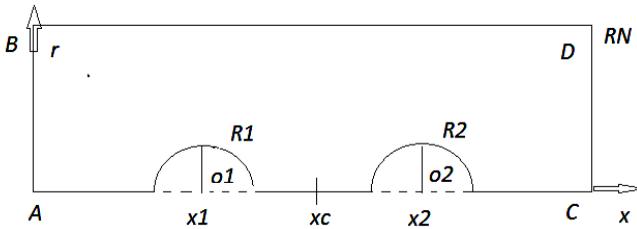


Рис. 1. Геометрия расчетной области

Параметрами задачи являются – расстояние между центрами сфер  $L=x_2 - x_1$ , радиусы сфер  $R_1, R_2$  и заряды на сферах  $Q_1, Q_2$ . Расчеты выполнялись в безразмерных переменных, в качестве единицы расстояния был выбран радиус первого шара  $R_1 = 1$  (полагалось, что  $R_2 > R_1$ ). Постановка задачи предполагает, что взаимодействующие заряды изолированы. Положение внешней границы, на которой задавалось нулевое значение потенциала, определялось параметрами метода  $\mu > 10$  и  $R_2$ :

$$x_1 = AO_1 = \mu + R_2, \quad O_2C = \mu + R_2, \quad AB = CD = \mu + R_2. \quad (1.1)$$

Уравнение Лапласа для потенциала в цилиндрических координатах  $x, r$  с учетом симметрии имело вид

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0. \quad (2.1)$$

В стандартных узлах уравнение аппроксимировалось на квадратной сетке  $dr = dx = h$ . Соответствующая система уравнений решалась итерационным методом. Особая аппроксимация уравнения (2.1) использовалась на оси и в узлах с нестандартными шаблонами вблизи шаров. Описание этих аппроксимаций дано [10].

Распределение потенциала находилось из решения задачи Дирихле при заданных значениях потенциалов на сферах  $Vs1$  и  $Vs2$ . Потенциалы  $Vs1$  и  $Vs2$  находились из решения двух дополнительных задач Дирихле (метод Робена). По вычисленным значениям потенциала находились различные характеристики решения: сила электростатического взаимодействия  $F$ , зависимости радиальных компонент поля на сферах  $E_r$  от полярного угла  $\beta$ , отношение максимальной радиальной компоненты поля на сфере к минимальной компоненте и другие.

Основной характеристикой решения являлось отношение вычисленной силы к силе взаимодействия по закону Кулона  $kf = F_0 / F$ . Так как при смене знака силы электростатического взаимодействия этот коэффициент меняет значение от  $-\infty$  до  $+\infty$ , использовались обратные значение аналогичных коэффициентов  $y_1 = F_1 / F_0$ ,  $y_2 = F_2 / F_0$

Основными параметрами, определяющими общее число узлов пространственной сетки, служили число интервалов на первом радиусе  $RN = 1/h$  и параметр  $\mu$ , определяющий внешний размер области (см. (1.1)). Максимальное значение индекса по радиусу  $k$  равнялось  $NMR$ , а максимальное значение индекса  $m$  равнялось  $NM$ . Для хранения всех элементов массива для потенциала  $V[k,m]$  требовалось

$$n = RN^2(L + 2(R_2 + \mu))(R_2 + \mu) \quad (3.1)$$

ячеек оперативной памяти. При типичных значениях параметров задачи и метода ( $L=3$ ,  $RN=24$ ,  $\mu=20$ ) число элементов массива для потенциала электростатического поля  $n$  более полу-миллиона. Расчеты выполнялись на РС с тактовой частотой 1.2 GHz. При значениях  $\mu = RN = 30$  время счета одного варианта около 30 час., при значениях  $\mu = RN = 20$  время счета 2.5 час. и лишь при малых значениях  $\mu = RN = 10$ , позволяющих получать лишь грубые результаты, время счета около 5 мин.

## 2. Метод решения

Аппроксимация уравнения Лапласа (2.1) на квадратной сетке  $r_k = k \cdot h$ ,  $x_m = m \cdot h$  в обозначениях школы А.А.Самарского [7] имела вид

$$\frac{1}{r_k} ((r_k + h/2) \cdot V_r - (r_k - h/2) \cdot V_r) + V_{x,x} = 0. \quad (1.2)$$

После введения обозначений

$$B1[k] = 1 + 0.5/k, \quad B2[k] = 1 - 0.5/k \quad (2.2)$$

уравнение (1.2) записывалось в виде удобном для применения итерационного метода

$$V[k, m] = (B1[k] \cdot V[k + 1, m] + B2[k] \cdot V[k - 1, m] + V[k, m + 1] + V[k, m - 1]) / 4. \quad (3.2)$$

Для сокращения объема вычислений значения компонент массивов  $B1$  и  $B2$  вычислялись один раз перед началом итераций.

Система уравнений для потенциала электростатического поля решалась методом последовательной верхней релаксации [7, 8]. Для узлов со стандартным шаблоном параметр верхней релаксации вычислялся по формуле, подобранной экспериментальным путем

$$\omega_* = 2 / (1 + \sin(0.9\pi / NMR)). \quad (4.2)$$

В этой формуле  $NMR$  – максимальное значение индекса  $k$  по радиусу.

Для узлов с нестандартными шаблонами вблизи сфер параметр релаксации равнялся 1.

Первое слагаемое в уравнении Лапласа (2.1) на оси имеет устранимую неопределенность типа "ноль, деленный на ноль". Применение к этому слагаемому правила Лопиталя позволяет выяснить, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \right) = 2 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right) \quad (5.2)$$

и использовать с учетом симметрии аппроксимацию

$$2 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right) \rightarrow \frac{4(V_{1,m} - V_{0,m})}{h^2}. \quad (6.2)$$

Окончательная аппроксимация уравнения Лапласа на оси с учетом (6.2) имела вид

$$V_{0,m} = (4V_{1,m} + V_{0,m+1} + V_{0,m-1}) / 6. \quad (7.2)$$

Для сокращения общего числа операций значения потенциала на оси  $V_{0,m}$  находились методом скалярной прогонки в предположении, что значения потенциалов на соседнем слое  $V_{1,m}$  известны. Прогонки осуществлялись для трех участков на оси (перед первой сферой, между сферами и после второй сферы) в предположении, что значения потенциалов на концах участков заданы.

Особая конечно-разностная аппроксимация уравнения Лапласа для узлов с не стандартными шаблонами описана в статье [10]. Наличие нестандартных узлов отражалось и на организации циклов по узлам со стандартными шаблонами для пяти областей.

Перейдем к краткому описанию основных блоков программы [10].

1. В первом блоке описываются используемые переменные, подпрограммы и задаются значения параметров задачи и метода.

2. Во втором блоке вычисляются индексы и параметры нестандартных узлов.

3. В третьем блоке задаются нулевые значения для потенциала для узлов вне сфер и заданные значения потенциала  $Vs1$ ,  $Vs2$  внутри сфер и на их поверхностях. Кроме того, задается нулевое значение для счетчика полных (внешних) итераций  $mfull=0$ . Полное число внешних итераций (циклов) всегда было менее 200.

4. После сброса в ноль счетчика внутренних итераций  $m0$  и значения невязки  $nev$  выполнялись итерации по внутренним узлам расчетной области. Вначале вычислялись значения потенциала для узлов с нестандартными шаблонами. Далее осуществлялись итерации по всем узлам со стандартным шаблоном. Эта часть программы была наиболее трудоемкой. Величина невязки  $nev$  вычислялась при счете во всех узлах. При завершении 4-го блока на 1 увеличивался счетчик внешних итераций  $mfull$  и выполнялось сравнение невязки с  $eps0=10^{-13}$ . Возврат в начало 4-го блока выполнялся при выполнении одного из двух условий:  $m0 < NM$ ,  $nev > eps0$ . Первое условие экономило время счета, сокращая число итераций на первых внешних циклах. Без первого условия общее число внутренних итераций  $Smo$  возрастало примерно на 40 %. Обычно до  $mfull \approx 40$  число итераций  $m0=NM$ , а затем убывало до 1.

Пример зависимости числа внутренних итераций  $m0$  от числа внешних итераций  $mful$  указан в табл. 1.

Таблица 1. Зависимости числа внутренних итераций  $m_1$  от номера внешних итераций  $m_{full}$  при  $L=3, \mu=10, RN=45$

$m_{full}$	$\leq 30$	40	50	60	70	80	$\geq 90$
$m_0$	1175	930	279	57	3	2	1

Значения  $m_0$  выводились на экран компьютера с интервалом для внешних итераций равным 2. Для интегрального анализа сходимости на печать выводились номера полных итераций  $m_1, m_2$  ( $m_1$  соответствует номеру, при котором впервые  $m_0 < NM$ ,  $m_2$  соответствует номеру, после которого все последующие  $m_0=1$ ). Так, например, при значениях  $L=3, \mu=30, RN=24$  полное число итераций  $S_{m_0}=73\ 424$ , а номера  $m_1, m_2$  равны соответственно 40 и 102.

Полное число внутренних итераций  $S_{m_0}$  возрастало при увеличении числа интервалов на первом радиусе  $RN$  сильнее линейной зависимости ( $S_{m_0} \approx RN^{1.2}$ ).

Для дополнительного контроля сходимости итерационного процесса через заданное значение числа полных итераций на экран компьютера выводилось также значение суммы радиальных значений напряженности на первом радиусе

$$SSE(m_{full}) = \sum_{j=0}^{2JN1} ME_{n1}[j]. \quad (8.2)$$

Эта величина быстро стабилизировалась. Значения элементов массива  $ME_{n1}$  соответствовали радиальным компонентам поля на первом радиусе. Приведем в качестве примера изменения этой величины при  $L=3.5, \mu=30, RN=24$  через 2 шага. Относительная разница  $(SSE(4)-SSE(2))/SSE(2)$  была равна 8.98 %, а последующие различия составляли 1.31 % и 0.74 %. После 50 внешних итераций не изменялись первые 8 значащих цифр SSE.

5. В этом блоке выполняется обработка результатов решения. По значениям радиальных компонент поля находятся отношения максимальной компоненты поля к минимальной  $kE1, kE2$ . Затем вычисляются заряды на половинках сфер  $QR1, QR2, QL1, QL2$  и силы взаимодействия  $F11, F12, F21, F22$ . В конце обработки результатов расчета на экране строятся зависимости радиальных компонент поля от полярного угла. Завершается программа построением изолиний.

### 3. Обработка результатов и вычисление интегральных характеристик

По вычисленным значениям потенциала  $V[k, m]$  находились следующие характеристики решения – радиальные компоненты поля на сферах  $En1[j], En2[j]$ , заряды на полусферах  $QL1, QR1, QL2, QR2$ , полные заряды на сферах  $Q1=QL1+QR1, Q2=QL2+QR2$ , силы  $f11, f12, f21, f22, F1=f11+f12, F2=f21+f22$ . Интегральными характеристиками зависимости  $En1[j]$  служили три величины –  $kE1$  (перепад напряженности на первой сфере),  $SEn$  (среднее значение) и  $GladEn$  (характеристика гладкости).

$$kE1 = \max_j(En1[j]) / \min_j(En1[j]),$$

$$SEn = \frac{1}{2 \cdot JN1} \sum_j En1[j]. \quad (1.3)$$

Характеристика гладкости была введена для того, чтобы сравнивать алгоритмы сглаживания. В первых расчетах эффекты негладкой зависимости напряженности от полярного угла  $\beta$  определялись по виду графического изображения функции  $En1(\beta)$ . Позднее была введена числовая характеристика  $GladEn$ . Для ее вычисления в цикле по индексу  $j$  от 2 до  $(2JN1-1)$  суммировались абсолютные значения выхода  $En1[j]$  за пределы соседних значений  $En1[j-1], En1[j+1]$ . Затем в процентах вычислялось окончательное значение

$$GladEn := 100 \times GladEn / SEn / (2JN1 - 1). \quad (2.3)$$

Эта величина не является полноценной характеристикой гладкости, она дает сигнал лишь о явном (существенном) отклонении от гладкости. Эта величина равна нулю, например, при изменении функции в виде лесенки.

Для контроля по вычисленным значениям потенциала проверялась погрешность выполнимости теоремы Гаусса, согласно которой должно быть выполнено равенство

$$\oint_s En \cdot ds = Q1 + Q2. \quad (3.3)$$

Относительное отклонение от выполнимости этого равенства оценивалось по формуле

$$dG=100 \times (G1+G2-Q1-Q2)/2/Q1, \quad (4.3)$$

в которой  $G1$ ,  $G2$  – вычисленные значения потоков напряженности поля:  $G1$  – поток через торцевые поверхности,  $G2$  – поток через боковую поверхность рассматриваемого объема. Эти потоки (интегралы) вычислялись по формуле трапеций с аппроксимацией нормальных компонент напряженности центральными разностями на фиктивных границах, удаленных от внешних границ на 20 узлов пространственной сетки. В типичных расчетах выполнялось неравенство  $G2 > 3.5 \cdot G1$ ; с ростом  $L$  и коэффициента  $\mu$  это отношение увеличивалось. Величина  $dG$  зависит от погрешностей вычисления потенциала, потоков  $G1$ ,  $G2$  и зарядов  $Q1, Q2$ .

Вычислительные эксперименты позволили выяснить, что основная погрешность  $dG$  обусловлена погрешностью вычисления радиальных компонент напряженности поля на сферах  $En1[j]$ ,  $En2[j]$ . Для уменьшения этой погрешности было испытано несколько вариантов вычисления  $En1[j]$ ,  $En2[j]$ . В итоге было выяснено, что наименьшая погрешность вычисления  $En1[j]$ ,  $En2[j]$  соответствует варианту, в котором значения  $En1[j]$ ,  $En2[j]$  вычислялись на поверхности (мысленных) сфер, удаленных от поверхности шаров на расстоянии  $ds=p \cdot h$  немного большем шага пространственной сетки  $h$  ( $p > 1$ ). Значения потенциалов на этих сферах вычислялись по аппроксимации значений потенциалов по четырем точкам соответствующей стандартной ячейки.

Вычисления с различными значениями  $ds = p \cdot h$  были выполнены при  $L = 3$ ,  $\mu = 10$ ,  $RN = 10$ . Минимальное значение характеристики отклонения от гладкости  $GladEn \leq 0.07\%$  было достигнуто при  $p=1.15$  (при  $p=0$  величина  $GladEn \approx 0.98\%$ , а при  $p=1$   $GladEn=0.118$ ).

Полная сила, действующая на первый шар сравнивалась с силой, вычисляемой по закону Кулона  $F_0 = Q1 \cdot Q2 / (4\pi L^2)$ , с помощью коэффициента  $kf = F_0 / F$ ,  $y = F / F_0$ . Значения  $kf > 1$  соответствуют ослаблению силы по сравнению с законом Кулона для точечных зарядов, а значения  $kf < 1$  соответствуют, наоборот, увеличению силы.

Кроме вычисления сил по формулам через значения нормальных компонент поля использовалось вычисление сил по значению производной от потенциальной энергии  $F_U = -\partial U / \partial L$ . Расчеты позволили выяснить, что значение силы при  $L=3$ , вычисленное обычным способом, отличается от использования  $F_U = -\partial U / \partial L$  на величину менее 0.01 %.

#### 4. Результаты решения

Обсудим вначале решение, полученное при достаточно большом расстоянии между сферами, при котором сила отталкивания незначительно отличается от формулы по закону Кулона. Изолинии потенциала для этого случая представлены на рис.2. Параметры решения соответствуют равным зарядам на сферах  $Q_1 = Q_2 = 1$  при расстоянии между центрами шаров  $L=5$  и радиусе второго шара  $R_2 = 2 \cdot R_1$ .

Решение получено при параметрах метода  $RN = \mu = 20$ . Время счета около 2.5 час; полное число внешних итераций около 138 тыс.

Анализ числа итераций на трех этапах метода Робена показал, что больше всего внешних итераций (35.5 %) требуется на втором этапе метода при решении задача с заданным потенциалом на втором шаре. Меньше всего итераций (30.4 %) требует третий этап метода, при котором решается задача с заданными потенциалами  $Vs1$  на первом шаре и  $Vs2$  на втором шаре

Шаг между изолиниями на рис. 2 равнялся одной десятой от максимальной разницы потенциалов. Изображена не вся область решения (левый и правый край отстоят от центров шаров на расстоянии равном трем радиусам). Поэтому в изображенную область не вошла часть изотерм. По картине изолиний и интегральным характеристикам отчетливо видна асимметрия решения относительно середины области.

Из анализа интегральных характеристик решения видны признаки погрешности – отклонение от выполнения теоремы Гаусса  $dG \approx 4.5$  % и отклонение от выполнимости третьего закона Ньютона

$$df = 100 \cdot (F_2 - F_1) / F_0 \approx 4.7\%.$$

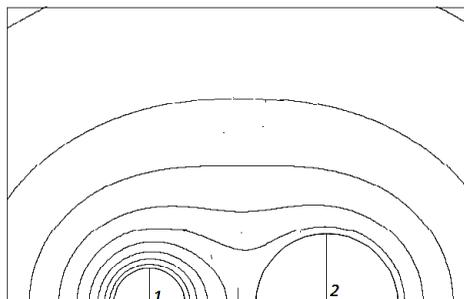


Рис. 2. Изолинии потенциала при  $L=5$ ,  $R_2=2$

Перейдем к обсуждению результатов, в которых обнаруживается эффект смены силы отталкивания на силу притяжения. Основная характеристика силы взаимодействия заряженных сфер дается отношением  $kf = F_0 / F_1$ , в котором  $F_0 = Q_1 \cdot Q_2 / 4\pi \cdot L^2$  – сила отталкивания по формуле Кулона для точечных зарядов, а  $F_1$  – сила отталкивания первой сферы, вычисленная в результате расчетов. В дальнейшем изложении вместо величины  $kf = F_0 / F_1$  будет использоваться обратная величина  $y_1 = 1 / kf$ . Эта замена ( $kf \rightarrow y_1 = 1 / kf$ ) обусловлена тем, что  $kf$  при значении  $L=L_*$  обращается в бесконечность, а величина  $y_1 = 1 / kf = 0$ .

Характеристиками погрешности вычисления силы  $F_1$  и коэффициента  $kf$  являются – отклонение от выполнимости теоремы Гаусса  $dG$  и отличие от выполнимости третьего закона Ньютона  $df = abs(F_2 - F_1)$ . Для анализа этих величин были выполнены расчеты при фиксированных значениях  $R_2 = 2 \cdot R_1$ ,  $L=5$  и 7 различных значениях параметров метода  $z = 1 / \mu$ ,  $h = 1 / R$  из интервала 0.1 до 1/30. Полученные результаты позволили получить методом наименьших квадратов зависимости

$$\begin{aligned}
 dG &\approx 90.25 \cdot z - 0.453 \cdot h \\
 df &\approx 3.65 \cdot z + 112.3 \cdot h \\
 kf &\approx 1.213 + 0.00013 \cdot z + 0.895 \cdot h
 \end{aligned}
 \tag{1.4}$$

Отсюда следует, что получение малых погрешностей этих величин требует малых значений  $z$  и  $h$ , влекущих за собой большие затраты машинного времени. При значениях  $z = h = 1/30$  время счета более суток.

На рис. 3 приведены изолинии потенциала для расстояния между сферами, равном  $L = 3.15$ , при котором отталкивание сменилось на притяжение. Значение  $y=0.5012$  для этого случая соответствует притяжению; потенциалы на сферах равны  $V_{s1}=0.0912$ ,  $V_{s2}=0.0614$ . Как видно, третья изолиния (при нумерации от первой сферы) весьма близко подходит ко второй сфере с потенциалом  $V_{s2}$ .

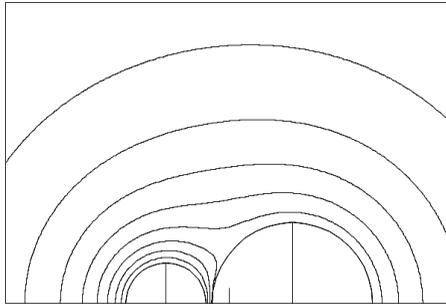


Рис. 3. Изолинии потенциала при  $R_2 = 2$ ,  $L=3.15 < L_*$ .

Для выяснения характера перестройки потенциала поля при сближении сфер анализировалось поведение потенциала между сферами на оси  $r=0$ . При значительном расстоянии между сферами потенциалы убывают при удалении от сфер. Иллюстрацией к этому случаю относится рис. 4, на котором изображена зависимость потенциала на оси  $V[0,j]$ . Индекс горизонтального узла  $j$  при этом отсчитывается от правого края первой сферы, а максимальное значение этого индекса соответствует левому краю второй сферы.

Результат получен при параметрах метода  $\mu = 10$ ,  $RN=20$ . В соответствии с граничными условиями максимальное значение потенциала равно потенциалу на первой сфере  $V_{s1}$ , на правом краю потенциал равен потенциалу на второй сфере  $V_{s2}$ .

Как видно, потенциал убывает при удалении от обеих сфер и достигает минимума на расстоянии  $xm \approx 3.1$  от правого края первой сферы (напомним, что расстояние между краями сфер равно  $dL = L - R_2 - R_1 = 8 - 2 - 1 = 5$ ). Минимальное значение потенциала составляет  $\approx 65.1\%$  от  $V_{s2}$ . При уменьшении расстояния между сферами минимальное значение потенциала увеличивается, достигает значения  $V_{s2}$  при  $L \approx 5$ . Дальнейшее уменьшение расстояния между сферами приводит к линейной зависимости потенциала от  $V_{s2}$  до  $V_{s1}$  (уже при  $L=4$  отличие от линейной зависимости незначительно).

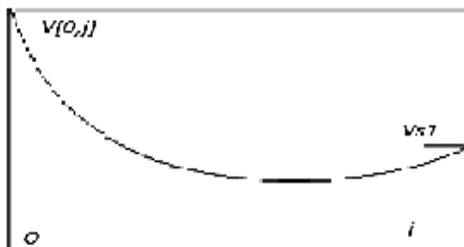


Рис. 4. Потенциал между сферами на оси ( $r=0$ ) при  $L = 8$ ,  $R_2 = 2$

Основной целью исследования является выяснение зависимости критического расстояния между сферами  $L_*$  от отношения радиусов. Поэтому вначале были выполнены вычислительные эксперименты (ВЭ), в которых определение  $L_*$  выполнялось при фиксированном отношении радиусов  $R_2/R_1 = 4$  и различных значениях параметров метода  $h = 1/RN$ ,  $z = 1/\mu$ .

В этих ВЭ расчеты выполнялись для различных значений  $L$  так, чтобы обеспечить попадание значения корня  $y_1 = 1/kf = 0$  в интервал длиной  $\Delta L = 0.1$ . В найденном интер-

вале левое значение величины  $y_L$  было положительным, а правое значение  $y_R$  было отрицательным. Значение корня  $L_*$  определялось в предположении линейной зависимости  $y(L)$  на найденном интервале.

Полученные результаты были обработаны методом наименьших квадратов.

Поиск параметров зависимости в виде ( $z = 1/\mu$ )

$$L_*(z, h) = \bar{L}_* + c_1 \cdot z + c_2 \cdot h \quad (2.4)$$

дал следующие значения  $\bar{L}_* = 6.504$ ,  $c_1 = 0.00041$ ,  $c_2 = 0.7677$ . Отсюда следует, что относительная погрешность определения  $L_*$  менее 1 % при значениях параметров метода  $z = h = 1/30$ .

Расчеты показывают, что при больших отношениях радиусов коэффициент  $c_1$  в погрешности (4.1) выше, что требует большего значения параметра  $\mu$ .

Отметим еще одну особенность расчетов, связанную с погрешностью, ведущей к отклонению от третьего закона Ньютона  $(F_1 + F_2) \neq 0$ . Это отклонение естественно убывает при  $\mu \rightarrow \infty$  и  $h \rightarrow 0$ , что требует увеличения объема вычислений. Проще всего оценить влияние этой погрешности, вычисляя критические значения  $L_*$ , дающие корни двух уравнений  $y_1(L) = F_1/F_0 = 0$ ,  $y_2(L) = F_2/F_0 = 0$ .

Результаты соответствующих вычислительных экспериментов показали, что относительная разница корней этих уравнений при  $R_2 = 10$ ,  $\mu = RN = 30$  менее 0.2 %. Поэтому дальнейшие расчеты выполнялись в предположении, что корень уравнения  $y_1(L) = 0$  и определяет критическое значение  $L_*$ .

Из результатов расчета видно, что при  $L \rightarrow \infty$  отношение сил  $y_1 = F_1/F_0$ , как и положено, стремится к 1.

Для получения зависимости  $L_*(R_2)$  были выполнены расчеты, в которых определялось значение  $L_*$  при различных значениях радиуса второй сферы из интервала от 1.5 до 15.

Соответствующие результаты, полученные при параметрах метода  $\mu = RN \geq 20$ , представлены в табл. 2.

Таблица 2. Значения корня функции  $y_1(L)$  при различных значениях  $R_2$

$R_2$	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
$L_*$	2.705	3,258	4.902	6.544	8.186	9.813
$R_2$	8.0	10	12	15		
$L_*$	13.37	16.21	19.42	25.078		

Из табл. 2 видно, что значения  $L_*$  монотонно растут при увеличении отношения радиусов. В работе [10] поиск аналитической зависимости  $L_*(R_2)$  выполнялся для двух функций следующего вида

$$L_*(R_2) \approx f_1(R_2) = (1 + R_2) \cdot (A(R_2 - R_0) + B(R_2 - R_0)^2), \quad (3.4)$$

$$dL_*(R_2) = L_8 - (1 + R_2) = f_2(R_2) = C \cdot (1 - \exp(-\beta \cdot (R_2 + \Delta R))). \quad (4.4)$$

В обеих формулах три подгоночных параметра. Качество этих формул оценивалось по асимптотическим свойствам при больших значениях отношения радиусов  $R_2$  и по средней сумме квадратов невязок

$$S_i / n = (\sum (f_i(R_2(k)) - L_*(k))^2) / n. \quad (5.4)$$

Анализ результатов показывает, что при малых значениях отношения радиусов  $R_2 \leq 3$  хороша аппроксимация простой функцией

$$f_0(R_2) = k \cdot (1 + R_2) \cdot (R_2 - R_0). \quad (6.4)$$

Формула имеет лишь два параметра – коэффициент  $k$  и радиус  $R_0$ . Процесс минимизации соответствующей суммы квадратов невязок  $S$  дал следующие значения  $k = 0.103$ ,  $R_0 = 1.00$ ,  $S = 0.07$ . Значение  $R_0 = 1.00$  отчетливо показывает, что инверсия закона Кулона проявляется при  $R_2 > R_1$ .

Перейдем к обсуждению аппроксимаций  $f_1, f_2$ . Эти функции имеют по три подгоночных параметра. Предполагалось, что они смогут описать зависимость на большем интервале значений  $R_2$  по сравнению с формулой (6.4), предназначенной для описания зависимости  $L_*(R_2)$  лишь при малых значениях отношения радиусов сфер.

Анализ результатов вычислительных экспериментов привел к тому, что первая аппроксимация (2.4) была отвергнута. Назовем причины отказа от этой аппроксимации. Ожидалось, что значение параметра  $R_0$  будет близко к 1, а оно оказалось значительно меньше 1. Кроме того, получающиеся отрицательные значения параметра  $B$  приводят к тому, что при достаточно больших значениях  $R_2$ , функция  $f_1(R_2)$  описывает уменьшение критического расстояния  $L_*$ , что противоречит расчетам.

Опишем результаты по минимизации суммы квадратов невязок для второй функции с ожидаемым свойством экспоненциального насыщения

$$\lim_{R_2 \rightarrow \infty} f_2(R_2) \text{ при } R_2 \rightarrow \infty \text{ равен } C. \quad (7.4)$$

Использование метода градиентного спуска для минимизации суммы квадратов невязок для результатов, полученных в [10] привел к функции

$$dL_*(R_2) \approx 29.7 \cdot (1 - 0.03527 \cdot (R_2 - 1)). \quad (8.4)$$

Среднее значение суммы квадратов невязок для этой функции  $S/n = 1.495$ . Эту величину логично сравнивать со средним значением данных  $(\sum dL_{*j})/n \approx 3.49$ . Итерации по методу градиентного спуска продолжались до тех пор пока 30  $\mu$  000 шагов спуска не меняли третьи значащие цифры у параметров и суммы квадратов невязок. Полученное значение

асимптотического значения  $C \approx 28$  позволяет понять – почему расчеты, выполненные при  $R_2 \leq 10$ , не обнаруживали заметных признаков насыщения.

Перейдем к описанию результатов, нацеленных на уточнение зависимости  $L_*(R_2)$  для равных зарядов и уже приведенных в табл. 2. В первую очередь в этих ВЭ уточнялись значения  $L_*(R_2)$  для расширенного интервала радиуса  $R_2$  от 1.5 до 15.

Укажем источники погрешности определения  $L_*$ . В первую очередь, это естественно параметры метода – число интервалов на первом радиусе  $RN$  ( $h=1/RN$ ) и параметр  $\mu$ , определяющий размеры области, на границах которой задавалось нулевое значение потенциала. Влияние этих погрешностей при  $R_2 = 2$ ,  $L=5$  определяется формулой (4.1).

Погрешность определения  $L_*$  зависит также от способа определения корня функции  $y_1(L) = 0$ . Погрешность метода приводит к тому, что вычисленная сумма сил ( $F_1+F_2$ ) не равна нулю. Выполненные ВЭ показывают, что эта сумма сил убывает при  $RN$  и мю стремящихся к бесконечности. Оценка вклада этой погрешности определения  $L_*$  может быть учтена различием корней  $y_1(L) = 0$  и  $y_2(L) = 0$ . ВЭ показали, что при  $R_2 = 10$ ,  $RN = \mu = 30$  отличие этих корней менее 0.15 %. Поэтому в дальнейшем значение  $L_*$  находилось как корень функции  $y_1(L) = 0$ .

Существенную роль в определении точности  $L_*$  играет подробность перебора значений расстояний между сферами.  $Lj$ . ВЭ выполнялись обычно до тех пор пока не найден интервал длиной  $\Delta L = 0.1$ , на границах которого значения отношения сил имеют разные знаки.

Задаваемые значения расстояний между сферами  $Lj$  могли отличаться от реальных значений, если произведение  $RN * Lj$  не оказывалось равным целому числу. В этом случае реальное значение  $Lj$  было меньше заданного на долю шага пространственной сетки. В уточняющих расчетах эта ошибка была устранена

и для контроля на печать выводилось задаваемое значение  $L_j$  и реальное.

Уточнение результатов расчета для 10 значений  $R_2$  ( $1.5 \leq R_2 \leq 15$ ) озволило с помощью метода наименьших квадратов получить аппроксимационную формулу:

$$dL_*(R_2) = f_2(R_2) \approx C * (1 - \exp(-\beta * (R_2 - R_0))). \quad (9.4)$$

При среднем значении суммы квадратов невязок  $Sm/N=0.0817$  (эту величину следует сравнивать со средним значением  $dL_* = 3.3$ ) параметры формулы (9.4) таковы:  $C=33.2$ ,  $\beta=0.0220$ ,  $R_0=1.71$ . Отметим, что уточнение расчетов уменьшило сумму квадратов невязок по сравнению с результатами [10] примерно в 18 раз. Наибольшее отклонение от этой формулы характерно для краев интервала по  $R_2$ . Вычисления с использованием различных пар значений из табл. 2 показали, что допустимы значения параметра  $C$  в интервале от 31 до 33, что согласуется с результатом аппроксимации методом наименьших квадратов. Из представленных результатов, в частности, следует, что при  $R_2 \rightarrow \infty$  критическое расстояние  $dL_* = L_* - (1 + R_2) \rightarrow C$ . Величина  $C$  дает оценку расстояния между заряженным шаром и заряженной поверхностью, несущей такой же заряд, при котором сила отталкивания меняется на силу притяжения. Проверка этого утверждения может быть выполнена с помощи ВЭ для соответствующей геометрии.

Однако сравнение результатов расчета с предельными случаями, выполненное ниже, показывает, что решение поставленной задачи дает разумные значения и для предельных случаев взаимодействия точечного заряда, как с бесконечной поверхностью, так и с проводящей сферой. Результаты, представленные выше, относились к случаю одинаковых зарядов на сферах  $q_1=q_2$  ( $\xi=1$ ). Перейдем к описанию результатов ВЭ, выполненных при различных отношениях зарядов  $\xi \equiv q_1/q_2$ . Соответствующие значения  $dL_*(R_2) = L_* - (R_2 + 1)$  для двух отношений зарядов  $q_1/q_2=2$ ,  $q_1/q_2=0.5$  и различных значений отношений радиусов представлены в табл. 3:

Таблица 3

$R_2$	3	4	5	6	8	9	10
$\xi = 0.5$	5.36	5.773	6.052	6.262	6.404	5.544	6.569
$\xi = 2$	0.351	0.773	1.212	1.655	2.564	3.526	4.51

Отчетливо видно, что критическое значение  $dL_*(R_2)$  уменьшается при относительном увеличении доли заряда на сфере с большим радиусом, когда  $\xi \equiv q_1/q_2 < 1$ .

Данные, представленные в табл. 3, относятся к случаю существенного отклонения отношения зарядов  $\xi$  от 1. При малых отклонениях отношения зарядов  $\xi$  от 1 справедлива линейная зависимость вида:

$$dL_*(\xi) \approx dL_*(1) * (1 + k * (\xi - 1)). \quad (11.4)$$

Коэффициент  $k$  в этой формуле  $k = k_1 \approx 0.194$  при  $\xi > 1$ , а при  $\xi < 1$   $k = k_2 \approx 0.236$ .

Выполненные расчеты взаимодействия заряженных проводящих сфер позволяют сделать качественное и количественное сравнения с хорошо известными в электростатике результатами для двух случаев взаимодействия точечного заряда с плоскостью и с проводящей сферой. Для сравнения выберем результаты расчета, полученные для параметров:

$$R_2 = 10, L=13, \xi = q_1 / q_2 \geq 10^6. \quad (12.4)$$

Сделаем критические замечания относительно параметров задачи, отличающихся от предельных случаев. Вместо взаимодействия точечного заряда рассмотрен вариант взаимодействия с зарядом на шаре с радиусом  $R_1$  ( $R_1 \neq 0$ ). Вместо взаимодействия заряда с плоскостью рассмотрен вариант взаимодействия со сферой конечного радиуса ( $R_2 \neq \infty$ ) Вместо варианта взаимодействия с нулевым зарядом на поверхности и сфере рассмотрен вариант взаимодействия с малым значением отношения зарядов ( $q_2 = q_1 / \xi \neq 0$ ). Несмотря на справедливые указанные критические замечания сравнение результатов не дает противоречивых значений с предельными случаями.

Известно [11], что сила притяжения точечного заряда, находящегося на расстоянии  $A$  над плоскостью, равна  $F_{01} = q/4\pi(2A)^2$ . Для параметров задачи (12.4) расчет дал значение для отношения сил  $y = F/F_0 = 4.36 * 10^6$  ( $F_0 = q_1 * q_2 / (4\pi L^2)$ ).

Поэтому отношение вычисленной силы притяжения к силе  $F_{01} = q/4\pi(2A)^2$  дается формулой

$$\lambda_1 = F/F_{10} = \left(\frac{y}{\xi}\right) * \left(\frac{2A}{L}\right)^2. \quad (13.4)$$

Величина  $A$  в этой формуле для не точечного заряда не определена. В качестве минимального значения можно выбрать ближайшее расстояние между сферами  $A_1 = dL = L - (R_2 + 1)$ , в качестве среднего значения можно выбрать расстояние от центра первой сферы до поверхности второй сферы  $A_2 = dL = L - R_2$ , а в качестве максимального значения можно выбрать  $A_3 = A_2 + 1$ . Для параметров расчета (12.4)  $A_1 = 2$ ,  $A_2 = 3$ ,  $A_3 = 4$ . Для среднего значения  $A_2$  отношение сил  $\lambda_1 \approx 0.929$ , а интервал возможных значений отношения сил  $\lambda_1$  простирается от 0.413 до 1.651. При значении  $A=3.113$  немного превышающем среднее значение, отношение сил равно 1.

Выполним сравнение результатов расчета с параметрами (12.4) со случаем взаимодействия точечного заряда со сферой [11]. Этот случай подробно рассмотрен в § 9 шестой главы [11] с названием "Точечный заряд у проводящей сферы". Согласно Фейнману электростатическая индукция наводит в сфере два заряда с модулем равным  $\tilde{q} = q \cdot (R/L)$ . Условие постоянства потенциала на проводящей сфере приводит к требованию размещения одного наведенного заряда на расстоянии  $\Delta l = R^2/L$  от центра сферы, а другого в центре сферы. Далее Фейнман предполагает, что силу взаимодействия можно оценить как разность двух сил – силы притяжения разноименных точечных зарядов, расположенных на расстоянии  $(L - \Delta l)$  и силы отталкивания одноименных зарядов, расположенных на расстоянии  $L$ . В итоге сила притяжения оказывается равной

$$F_F = \frac{q \cdot \tilde{q}}{4\pi} \left( \frac{1}{(L - \Delta l)^2} - \frac{1}{L^2} \right). \quad (14.4)$$

Отношение вычисленной силы по данным (12.4) к силе Фейнмана  $F_F$  для данных  $R=10$ ,  $L=13$  оказывается равным  $\mu_2 \approx 1.134$ . Уменьшение расстояния  $L$  на 2.3 % дает значение отношений сил даже немного ниже 1 ( $\mu_2 \approx 0.995$ ). Малое отклонение отношения сил от 1 позволяет считать, что результаты расчетов согласуются с предельными результатами. При этом следует учесть как критические замечания относительно параметров расчета ( $R_1 \neq 0$ ,  $q_2 \neq 0$ ), так и сомнительное предположение Фейнмана о возможности описания силы взаимодействия точечного заряда со сферой как результат взаимодействия трех точечных зарядов.

Напомним, что расчеты с параметрами (12.4) соответствовали не нулевому заряду  $q_2$ , а заряду, уменьшенному в  $\xi = 10^6$  раз ( $q_2 = q_1 / \xi$ ). Вычислительный эксперимент с отрицательным значением заряда  $q_2 = -q_1 / \xi$  (остальные параметры расчета были сохранены) дал увеличение силы притяжения лишь на 0.11 %. Этот результат позволяет не принимать во внимание критическое замечание о том, что в расчетах  $q_2 \neq 0$ .

Знание силы взаимодействия зараженных тел позволяет более точно решать задачи о движении заряженных макроскопических тел. В частности эффекты инверсии силы отталкивания могут быть экспериментально обнаружены на системе двух маятников с заряженными сферами, так как при расстояниях между сферами близком к критическому должна появиться асимметрия колебаний.

Возникает вопрос о возможности рассмотренных эффектов для элементарных частиц. В ядрах атомов протоны расположены на близких расстояниях. Если при этом сила отталкивания меняется на силу притяжения, то вопрос об устойчивости ядер может быть пересмотрен. Для рассмотрения соответствующих задач пока не хватает данных. Пока известно [12], что элементарные частицы состоят из кварков с дробными зарядами. Из некоторых экспериментов вытекает, что плотность заряда в заряженных частицах распределена по экспоненциальному закону.

## Выводы

1. Вычислительные эксперименты позволили выяснить, что смена знака силы взаимодействия одноименно заряженных сфер с равными зарядами происходит лишь для сфер с различными радиусами.

2. Показано, что критическое расстояние между сферами  $L_*$ , при котором происходит смена знака силы, монотонно увеличивается с ростом отношения радиусов  $R_2$ . При  $R_2 \leq 3$  зависимость  $L_*(R_2)$  близка к линейной функции. Найдена аппроксимационная формула для описания зависимости  $L_*(R_2)$  с признаками асимптотического насыщения.

3. Показано существенное влияние отношения зарядов на сферах на зависимость  $L_*(R_2)$ .

4. Найдены зависимости, облегчающие выяснения параметров метода, которые обеспечивают повышенную точность расчетов.

## Библиографический список

1. *Саранин В.А.* О взаимодействии двух электрически заряженных шаров // *Успехи физических наук.* 1999. Т. 169. С. 453–458.

2. *Саранин В.А., Мейер В.В.* Теоретические и экспериментальные исследования взаимодействия двух проводящих заряженных шаров // *Успехи физических наук.* 2010. Т. 180, № 10. С. 1009–1117.

3. *Saranin V.A.* Energy, force and field strength in a system of two charged conducting balls // *Journal of Electrostatics*, 71 (2013). P. 746–753.

4. *Smythe W.R.* *Static and Dynamics Electricity* // *McCraw – Hill.* New York, 1950.

5. *Тарунин Е.Л.* Электростатическое взаимодействие заряженных проводников на близких расстояниях // *Вестник Пермского университета. Серия Физика.* 2013. Вып. 2(24). С. 49–56.

6. *Davis M.H.* Two charged spherical conductors in a uniform electric field: forces and field strength // *Q.J. Mech. Appl. Math.* 17 (1964). P. 499–511.

7. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.

8. *Тарунин Е.Л.* Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Иркут. ун-т, 1990. 226 с.

9. *Физический* энциклопедический словарь Т. 5. М.: Советская энциклопедия, 1960.

10. *Тарунин Е.Л.* Инверсия силы кулоновского отталкивания одноименно заряженных шаров на близких расстояниях // *Проблемы механики и управления: межвуз. сб. науч. тр.* Пермь: изд-во Перм. ун-та, 2015. Вып. 47. С. 120–144.

11. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Ч. 5: Электричество и магнетизм. М.: Мир, 1966. 296 с.

12. *Детлаф А.А., Яворский Б.М.* Курс физики. М.: Высшая школа, 2001. 718 с.