

УДК 531.53

Н.Н. Макеев

*Институт проблем точной механики
и управления РАН*

Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, 24
nmakeyev@mail.ru; (845) 272-35-33

МАЯТНИКОВОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОКОПРОВОДЯЩЕГО ТВЁРДОГО ТЕЛА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Приводится анализ топологической структуры фазовых траекторий динамической системы, характеризующей медленные маятниковые движения твёрдого тела, несущего два плоских ортогонально расположенных электропроводящих контура. Движение тела совершается в переменном высокочастотном магнитном поле, частота колебаний которого намного больше собственной частоты колебаний маятника. Анализ проводится методами качественной теории динамических систем.

Ключевые слова: твёрдое тело; электрический контур; динамическая система; магнитное поле.

Введение

Проведённые исследования движения твёрдых тел с токопроводящими контурными элементами в переменном магнитном поле позволили установить возможность потери устойчивости их положения равновесия или стационарного вращения.

В частности, при медленных маятниковых движениях данных систем в высокочастотном магнитном поле проявляется влияние пондеромоторных сил, приводящих к эффекту "раскачивания". Стало известно и явление дестабилизации режимов

функционирования электромагнитных систем, происходящей под влиянием магнитного поля.

Вместе с тем, установлено явление стабилизируемости неустойчивых положений равновесия токопроводящих твёрдых тел, происходящее в однородном поле силы тяжести при воздействии осциллирующих электромагнитных сил.

Вопросы теории движения токопроводящих твёрдых тел актуальны в прикладных задачах динамики сложных механических систем, несущих контурные силовые элементы с электроприводом. Исследования динамики этих объектов проводится в основном качественными методами теории динамических систем. Одним из её распространённых приёмов исследования является разбиение пространства параметров данной динамической системы на области, различающиеся между собой топологической структурой фазового пространства, с целью построения адекватной модели исследуемого объекта.

1. Основные предпосылки

Рассмотрим структуру траекторного многообразия в фазовом пространстве автономной *динамической системы* (ДС)

$$\ddot{\theta} + \mu\alpha(F^2 + F_\theta^2)\dot{\theta} + \sin\theta + \beta FF_\theta = \lambda. \quad (1)$$

Здесь функция $\theta = \theta(\tau)$ ($0 \leq \theta \leq \pi$), τ – приведённое безразмерное (быстрое) время, $F = F(\theta)$ – заданная функция класса $C^1[0, \pi]$, $F_\theta = F'(\theta)$, $(\alpha, \beta, \lambda) = \text{const}$ – заданные действительные параметры ($\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$), $0 \leq \mu < 1$ – малый параметр (параметр возмущений). Точка сверху и штрих обозначают дифференцирование по τ и θ , соответственно. Данное уравнение относится к типу ДС, траектории которых расположены на бесконечном фазовом цилиндре $\Gamma(\theta, \dot{\theta})$.

Уравнение (1) определяет нелинейные маятниковые движения и представляет интерес в связи с решением некоторых нелинейных задач точной механики, электродинамики, теории фазовой автоподстройки частот и в ряде других задач [1].

Согласно системе уравнений Лагранжа–Максвелла [2] уравнение (1) может характеризовать медленные маятниковые движения твёрдого тела, несущего неизменно скреплённые с ним два одинаковых замкнутых проводящих электроток плоских линейных контура неизменной конфигурации, плоскости которых ортогональны (двухконтурный физический маятник). Движение этой контурной системы происходит в неоднородном высокочастотном магнитном поле, частота колебаний которого ν намного больше величины собственной частоты колебаний ν_0 двухконтурного маятника. Данная предпосылка позволяет принять за малый параметр ДС (1) величину $\mu = \nu_0/\nu$.

Данная аппроксимирующая модель, принятая в работе [3], имеет прикладное значение: она адекватно (в определённых пределах) моделирует движение токопроводящего кинетически осесимметричного твёрдого тела в указанном магнитном поле.

В дальнейшем ДС (1) рассматривается в применении к задаче о медленных маятниковых движениях (*М-задаче*). Для этой задачи в уравнении (1) обозначено: θ – угол отклонения маятника от положения равновесия; $F(\theta)$ – функция амплитуды магнитного поля; α, β – параметры контурной системы, определяемые её конструкцией, физическими характеристиками магнитного поля и электротока в контурных проводниках; λ – величина постоянного внешнего моментно-силового воздействия; $\tau = \nu t$, где t – натуральное время.

Уравнение данной М-задачи является родственным по структуре уравнению автоколебаний синхронного электродвигателя [4].

2. Постановка задачи

Ставится следующая задача: исследовать топологическую структуру (термин [5]) и свойства траекторного многообразия ДС (1), расположенного на её фазовом цилиндре Γ , в ограниченной М-задаче для характерной функции $F(\theta)$ конкретного вида или для ограничений, наложенных на эту функцию. $\square$

Такая формулировка задачи исследования характерна для детерминированных автономных нелинейных ДС, моделирую-

щих функционирование в магнитном поле технических устройств, содержащих токопроводящие контурные элементы. Целью данного анализа ставится выявление качественных особенностей траекторного многообразия ДС (1) на фазовом цилиндре Γ и его связь с пространством параметров этой системы.

3. Ограничительные оценки

Уравнение (1) относится к типу обобщённых уравнений Льена [6, 7], для которых структура траекторного многообразия традиционно исследуется тополого-аналитическим методом М. Картрайт [7].

Обозначим

$$p(\theta) = F^2 + F_\theta^2, \quad q(\theta) = \sin \theta + \beta F F_\theta$$

и представим уравнение (1) в виде

$$\ddot{\theta} + \mu \alpha p(\theta) \dot{\theta} + q(\theta) = \lambda \quad (0 \leq \theta \leq \pi). \quad (\text{A})$$

Пусть в уравнении (A) величины $p(\theta), q(\theta)$ для значений $\theta \geq \theta_0 = \theta(0)$ ограничены снизу, а величина $|q(\theta)|$ – сверху. Если при этом $\lambda = 0$, то, согласно данному методу, для решений ДС (A) с начальными условиями $\theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$ и для всех значений $\tau \geq \tau_0(\theta_0, \dot{\theta}_0)$ имеют место оценки

$$|\theta(\tau)| < A, \quad |\dot{\theta}(\tau)| < (1 + \mu) A, \quad (2)$$

где $A = \text{const} > 0$ и не зависит от значений параметра μ .

Далее предполагается, что величины $p(\theta), q(\theta)$ принадлежат классу $C^0[0, \pi]$, а $q(\theta)$ удовлетворяет условию Липшица, что обеспечивает единственность решений ДС (A) и их непрерывную зависимость от заданных начальных значений.

Пусть для ДС (A) выполняются условия $(|\alpha|, |\beta|, |\lambda|) \ll 1$. Тогда данная система близка (в определённом смысле) к каноническому уравнению маятника, представленному в безразмерной форме и следующему из ДС (A) при $\alpha = \beta = \lambda = 0$. Это уп-

рощённое уравнение, согласно [9], имеет асимптотическое при $\Omega \rightarrow +\infty$ решение

$$\theta(\Omega, \tau) = \Omega \tau + \Omega^{-2} \sin \Omega \tau + O(\Omega^{-3}), \quad (B)$$

где $\Omega > 0$ – заданный безразмерный большой параметр.

Соотношение (B), характерное для ДС с большой начальной энергией, аппроксимирует при $\Omega \rightarrow +\infty$ ротационный режим маятникового движения, близкий к стационарному (при котором $\theta = \Omega \tau$), имеющий характер осцилляций.

В силу асимптотики (B) значения аддитивной осциллирующей компоненты угла θ на плоскости (θ, τ) для достаточно больших значений параметра Ω с точностью до $O(\Omega^{-3})$ расположены в полосе шириной $2\Omega^{-2}$, причём $-\Omega^{-2} < \theta < \Omega^{-2}$.

Данная асимптотическая оценка может применяться как начальное (базовое) приближение для итераций при построении траекторного многообразия исходной возмущённой ДС.

Ограничительные оценки вида (2), (B) позволяют установить максимально возможные размеры фазовой области, содержащей траекторное многообразие данной ДС для фиксированных значений каждого из характерных параметров A, Ω .

4. Решение М-задачи в невозмущённом случае

Для дальнейшего обозначим

$$\begin{aligned} r(\theta) &= \lambda \theta + \cos \theta, & u(\theta) &= \beta F^2(\theta) - 2r(\theta), \\ w(\theta) &= C - u(\theta), & I(\theta) &= \int_0^\theta [w(s)]^{-1/2} ds, \end{aligned} \quad (3)$$

где C – постоянная. Для ДС (A) при $\mu = 0$ имеет место первый интеграл типа интеграла энергии системы

$$\dot{\theta}^2 = C - u(\theta). \quad (4)$$

Предполагается, что $F(0) = 0$, функция FF_θ – нечётная, а невозмущённая ДС (A) удовлетворяет условиям теоремы Пикара–Линделёфа о единственности решения задачи Коши [8]. Тогда для регулярного маятникового движения, соответствующего

щего нетривиальному решению этой системы при $\theta_0 = 0$, определённо имеем $C > 0$.

Проводя решение поставленной M -задачи традиционным способом [7], приходим к следующим возможным случаям периодических решений, описываемых в обозначениях (3).

Случай 1. Пусть существует значение $\theta = \theta_r > 0$, для которого согласно соотношению (4)

$$C = u(\theta_r) \quad (5)$$

и $C - u(\theta) > 0$ для значений $0 < \theta < \theta_r$.

Полагая величину периода

$$T = 4I(\theta_r) = 2\pi k^{-1}, \quad (6)$$

получаем решение ДС (4) в виде ряда Фурье

$$\theta(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nk\tau), \quad (7)$$

удовлетворяющее условиям

$$\theta(\tau_r) = \theta_r, \quad \dot{\theta}(\tau_r) = 0 \quad (\tau_r = T/4). \quad (8)$$

Здесь $\theta(\tau)$ – нечётная периодическая функция $(-\theta_r \leq \theta(\tau) \leq \theta_r)$ с периодом T (6), c_n – коэффициент Фурье, $k = k(C)$, а постоянная C определяется равенством (5).

Случай 2. Пусть $w(\theta) > 0$ для значений $\theta(\tau) > 0$ и функция $q(\theta) - \lambda$ – периодическая с периодом $T = 2\pi$. Тогда решение задачи ищем в виде

$$\theta(\tau) = m\tau + \Phi(\tau), \quad (9)$$

где $\Phi(\tau)$ – нечётная периодическая функция с периодом, равным $2\pi/m$, m – постоянная; при этом

$$\tau = \int_0^{\theta} [w(s)]^{-1/2} ds.$$

В силу соотношения (9) и автономности невозмущённой ДС (А) эта система имеет следующие двупараметрические множества решений:

– множество вида

$$\theta(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(C) \sin [k(C)\tau + \delta], \quad (10)$$

где C, δ – любые постоянные, а k определяется равенством (6);
– множество вида

$$\theta(\tau) = m\tau + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(m) \sin n(m\tau + \delta), \quad (11)$$

где m, δ – произвольные постоянные.

Результирующие соотношения (10), (11) определяют существенно различные режимы маятникового движения токопроводящей системы в магнитном поле. В частности, решение вида (11) содержит аддитивно входящую секулярную часть, тогда как решение (10) её не содержит.

В случае, при котором $C = M > 0$, решение $\theta(\tau)$ невозмущённой ДС (А) может быть как осциллирующим, так и не осциллирующим [7]. При этом если амплитуда осцилляций велика, то фазовая траектория близка к сепаратрисе.

Решения (7), (10), (11) исходной невозмущённой ДС составляют начальное приближение для нахождения решений возмущённой ДС (А) методом итераций Пикара-Линделёфа [8].

5. Структура траекторного многообразия системы

Рассмотрим случай, при котором функция амплитуды магнитного поля имеет вид $F(\theta) = F_0 \sin \theta$, где $F_0 = \text{const} \neq 0$ – заданный структурный параметр магнитного поля. Тогда уравнение (А) принимает вид

$$\ddot{\theta} + \mu a \dot{\theta} + (1 + b \cos \theta) \sin \theta = \lambda, \quad (12)$$

где $a = \alpha F_0^2$, $b = \beta F_0^2$. При этом величина $b \cos \theta \sin \theta$ в первом приближении характеризует потенциальные электромагнитные, а величина $a \dot{\theta}$ – "формально диссипативные" силы [3].

Грубая структура фазового траекторного многообразия системы (12) качественно в основном изучена [9]. Как известно

[6], ДС (12) при $\lambda = 0$ относится к типу уравнений, характеризующих колебания механической системы, подобной маятнику с неподвижной точкой подвеса, у которой восстанавливающая сила пропорциональна величине $f(\theta)$. Характерно также, что к данного рода системам относятся и некоторые гироскопические приборы [10, с. 93].

Уравнение (12) эквивалентно динамической системе

$$\dot{\theta} = \varphi, \quad \dot{\varphi} = \lambda - \mu a \varphi - f(\theta), \quad (13)$$

где $f(\theta) = (1 + b \cos \theta) \sin \theta$ ($-\pi \leq \theta \leq \pi$). Системе уравнений (13) при $\varphi \neq 0$ соответствует уравнение фазовых траекторий

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{1}{\varphi} [\lambda - \mu a \varphi - f(\theta)]. \quad (14)$$

Последующий анализ характера всего траекторного многообразия ДС (13), (14), расположенного на фазовом цилиндре Γ ($-\pi \leq \theta \leq \pi$) проводится на основе аппроксимации, предложенной в работе [11].

Для ДС (13) существуют два состояния равновесия, соответствующие двум особым точкам уравнения (14) – фокусу и седлу, расположенным на оси цилиндра $\varphi = 0$. При этом для значений параметра $a > 0$ фокус является устойчивым. Если $\lambda = 1$, то эти особые точки сливаются, порождая сложную особую точку типа "седло-узел".

Так как параметр a знакопостоянен в заданной области пространства параметров, то для ДС (13) предельных циклов, охватывающих её состояние равновесия, не существует [12]. Кроме того, не существует более одного предельного цикла, охватывающего фазовый цилиндр Γ . Бифуркации, обусловленные образованием двойного предельного цикла, также невозможны.

Поскольку среднее интегральное значение функции $f(\theta)$ на отрезке $[0, 2\pi]$ равно нулю, то пространство параметров для $(a, \lambda) > 0$ является грубым относительно класса характеристик $f(\theta)$ [11] и бифуркация, обусловленная петлёй сепаратрисы, может существовать лишь в фазовом полуцилиндре $\varphi > 0$. При этом каждая фазовая траектория ДС (13) на фазовом полуци-

линдре $\varphi < 0$, не являющаяся ω -сепаратрисой седла, пересекает ось полуцилиндра $\varphi = 0$.

Примем для определённости $b > 0$ и пусть $\theta = \theta_*$ – корень уравнения $f(\theta) = 0$ ($-\pi < \theta < \pi$). В целях аппроксимации введём для ДС (13) систему сравнения типа [11]

$$\dot{\theta} = \varphi, \quad \dot{\varphi} = \lambda - \mu a \varphi - g(\theta), \quad (15)$$

где характерная функция $g(\theta)$ минорирует величину $f(\theta)$.

Представим топологическую структуру фазового пространства ДС (13) и пространства параметров системы сравнения (15). Для ДС (15) при $(a, \lambda) > 0$ существует единственная структура разделения фазового пространства на траектории. Все её фазовые траектории, исходя из бесконечности, стремятся к устойчивому предельному циклу, который расположен в полосе $(1 + \lambda) \rho < \theta < \lambda \rho$ ($\rho = (\mu a)^{-1}$), принадлежащей фазовому полуцилиндру $\varphi > 0$.

Характер фазовых траекторий невозмущённой ДС (13) для значений $0 < \lambda < 1$ проявляется в следующем. Соответствующая ей ДС (14) имеет на фазовом цилиндре Γ две особые точки: центр $(\varphi, \theta) = (0, \theta_1)$ и седло $(\varphi, \theta) = (0, \theta_2)$, где $\theta_2 > \theta_1$ – корни уравнения $\lambda - f(\theta) = 0$. Через седло проходят сепаратрисы, определяемые уравнением

$$\frac{1}{2} \varphi^2 = \Psi(\theta) - \Psi(\theta_2) \equiv P(\theta, \theta_2), \quad (16)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \Psi(\theta) &= \lambda \theta + Q(\theta), \\ Q(\theta) &= (1 + 0.5 b \cos \theta) \cos \theta. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь функция $Q(\theta)$ при $|b| > 1$ имеет на своём периоде экстремумы в точках $\theta = (\mp \pi, \theta_*)$, где $\cos \theta_* = -1/b$.

Уравнение $P(\theta, \theta_2) = 0$ при $0 < \lambda < 1$ имеет двукратный корень $\theta = \theta_2$ и единственный простой корень $\theta = \theta_p$ такой,

что $-\pi < \theta_2^* < \theta_p < \theta_2$. Здесь величина θ_2^* – корень уравнения $Q(\theta) - Q(\theta_2) = 0$. Тогда сепаратриса (16) для данных значений λ имеет петлю, охватывающую положение равновесия $\theta = \theta_1$. При этом сепаратриса седла, расположенная на фазовом полуцилиндре $\varphi > 0$, накручиваясь на фазовый цилиндр Γ , стремится к бесконечно удалённой точке, устойчивой при $a = 0$.

Рассмотрим случай, при котором $\lambda = 0$, что соответствует условиям поставленной M -задачи. В этом случае имеем $\theta_p = \theta_2^*$ ($\theta_2^* = -\pi$) и сепаратриса содержит петлю, охватывающую фазовый цилиндр Γ .

Для $0 < \lambda < 1$ при малых значениях параметра μa сепаратриса седла, расположенная на фазовом полуцилиндре $\varphi > 0$, также накручивается на этот полуцилиндр. Поскольку при $a > 0$ для ДС (13) бесконечно удалённая точка неустойчива, то для малых значений параметра μa эта ДС имеет устойчивый предельный цикл, охватывающий фазовый цилиндр Γ . Согласно критерию Дюлака [12] этот предельный цикл является единственным.

В силу характерных особенностей структуры разделения фазового пространства ДС (13) для малых значений параметра μa и $0 < \lambda < 1$ существует бифуркационная кривая, исходящая из точки $a = \lambda = 0$, для точек которой сепаратрисы на фазовом полуцилиндре $\varphi > 0$ образуют петлю, охватывающую этот полуцилиндр. Эта кривая однозначно определена по параметру μa .

При $\lambda = 1$ на оси фазового цилиндра $\varphi = 0$ находится сложная особая точка типа "седло-узел". В этом случае существует единственное значение параметра $a = a_*$, при котором сепаратрисы, проходящие через данную точку, образуют петлю, охватывающую фазовый цилиндр Γ . При этом для значений параметра $0 < a < a_*$, имеет место устойчивый предельный цикл, охватывающий фазовый цилиндр Γ .

В случае, при котором $a_* < a < +\infty$, все фазовые траектории имеют предельной точкой точку типа "седло-узел". Здесь предельных циклов не существует.

При $\lambda > 1$ для любых значений параметра a существует единственный устойчивый предельный цикл. В этом случае особых точек на фазовом цилиндре Γ не имеется, а бесконечно удалённая точка неустойчива.

6. Эффект диссипации

Оценим эффект рассеяния механической энергии, возникающий при колебаниях маятника, обусловленный диссипацией. Положим $\theta_0 = 0$ и обозначим

$$\Phi(\theta) = \mu\alpha \int_0^\theta p(s) ds, \quad G(\theta) = \int_0^\theta q(s) ds, \quad (18)$$

где $p(\theta), q(\theta)$ – функции, содержащиеся в уравнении (A),

$$G(\theta) = G_0 + 0.5 F^2(\theta) - \cos \theta,$$

$$G_0 = 1 + \beta - 0.5 F^2(0).$$

Введём характерные функции класса $C^1[0, \pi]$

$$w = \dot{\theta} + \Phi(\theta), \quad E(\theta, w) = 0.5 w^2 + G(\theta). \quad (19)$$

В выражении (19) для E первое слагаемое можно трактовать как величину приведённой кинетической энергии маятника, а G – как его потенциальную энергию.

Уравнение колебаний маятника (A) при $\lambda = 0$ согласно обозначениям (18), (19) эквивалентно системе

$$\dot{\theta} = w - \Phi(\theta), \quad \dot{w} = -q(\theta) \quad (0 \leq \theta \leq \pi). \quad (20)$$

В силу соотношений (19), (20) известным способом [6] получаем зависимость $dE = \Phi(\theta)dw$.

Отсюда следует, что механическая энергия, рассеиваемая маятниковой системой при колебаниях, выражается величиной

$$\int \Phi(\theta) dw,$$

вычисленной вдоль интегральной кривой системы уравнений движения (20).

Библиографический список

1. *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.* Методы и приёмы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990. 486 с.
2. *Добронравов В.В.* Основы механики неголономных систем. М.: Высшая школа, 1970. 270 с.
3. *Артемяева М.С., Скубов Д.Ю.* Динамика проводящих тел маятникового типа в высокочастотном магнитном поле // Известия РАН. Механика твёрдого тела. 2001. № 4. С. 29–39.
4. *Власов Н.П.* Автоколебания синхронного мотора // Учёные записки Горьковского ун-та. 1939. Т. 12. Вып. 3.
5. *Обморшев А.Н.* Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1965. 276 с.
6. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969. 379 с.
7. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1964. 477 с.
8. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
9. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969. 379 с.
10. *Булгаков Б.В.* Прикладная теория гироскопов. М.: ГОНТИ, 1939. 258 с.
11. *Баутин Н.Н.* Об аппроксимациях и грубости пространства параметров динамической системы // Прикладная математика и механика. 1969. Т. 33. Вып. 6. С. 969–988.
12. *Дюлак Г.* О предельных циклах. М.: Наука, 1980. 160 с.