Вып. 49 **Межвузовский сборник научных трудов** **2017**

УДК 521:629.78

Н.А. Репьях, Е.Н. Остапенко

Пермский государственный национальный исследовательский университет

Россия, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15
8 (342) 2-396-309

К ВЫВОДУ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ПЛОСКОГО ЗАМКНУТОГО МНОГОЗВЕННИКА

В работах [2–6] рассматривается динамика свободного орбитального движения космических систем цепочечной структуры. В данной работе приведены предварительные положения необходимые для вывода уравнений движения плоского замкнутого многозвенника.

Ключевые слова: орбитальное движение, многозвенник, кинематические уравнения, замкнутая система точек, разомкнутая система точек.

Рассмотрим движение плоского замкнутого многозвенника $M_0M_1...M_s$ в системе координат Oxy (рис. 1), состоящего из M_k ($k=\overline{1,s}$) материальных точек, соединенных последовательно стрежнями с длинами l_k ($k=\overline{1,s+1}$). Будем считать, что известно движение точки $M_0(x_0,\ y_0)$, которую назовем опорной точкой. Положение этой точки зададим полярными координатами $(r,\ \nu)$, где r – расстояние точки M_0 от начала координат, ν – угол, отсчитываемый от полярной оси Ox. Если O – гравитационный центр, то угол ν называют истинной аномалией опорной точки.

Рассматриваемый многозвенник можно представить, как цепочку, состоящую из $s+1$ материальной точки, $(s+1)$-я точка

© Репьях Н. А., Остапенко Е. Н., 2017

которой замыкает цепочку, совпадая геометрически с начальной точкой M_0. В частности, случай $s = 2$ соответствует жесткому треугольнику, образованному стержнями l_1, l_2 и l_3.

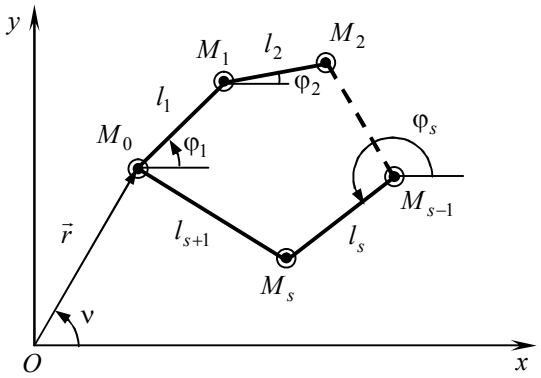

Рис. 1

Очевидно, декартовые координаты опорной точки будут определяться формулами:

$$\begin{cases} x_0 = r\cos\nu, \\ y_0 = r\sin\nu. \end{cases} \tag{1}$$

Прежде чем выводить уравнения движения замкнутой системы рассмотрим схему построения кинематических уравнений для разомкнутой системы тех же точек M_0, M_1,…, M_s.

Полагая, что положение опорной точки M_0 задано равенствами (1), декартовые координаты последующих точек M_1,…, M_s определяются через обобщенные координаты φ_k ($k = \overline{1,s}$):

$$\begin{cases} x_k = x_{k-1} + l_k\cos\varphi_k, \\ y_k = y_{k-1} + l_k\sin\varphi_k. \end{cases} \tag{2}$$

где φ_k – угол, определяющий ориентацию стержня l_k.

Равенства (1) и (2) показывают, что число степеней свободы стержневой системы, состоящей из s стержней и соединяющих последовательно $(s+1)$ материальные точки, равно

$$n = s + 2. \tag{3}$$

Переход от разомкнутой системы к замкнутой можно выполнить двумя способами.

Первый основан на введении в механическую систему точек дополнительного замыкающего стержня l_{s+1}, который соединяет точки $M_s(x_s, y_s)$ и

$$M_0(x_0, y_0) \equiv M_{s+1}(x_{s+1}, y_{s+1}). \tag{4}$$

По второму способу, если не вводить в рассмотрение замыкающий стержень l_{s+1}, следует выполнить условие (4) при $l_k \neq 0$ ($k = \overline{1, s}$):

$$M_0(x_0, y_0) \equiv M_s(x_s, y_s) \tag{5}$$

Второй способ приводится к первому, если считать $l_{s+1} = 0$, поэтому будем рассматривать первый способ, как более общий.

Тогда по первому способу, на основании соотношений (2) координаты последней точки $M_s(x_s, y_s)$ будут

$$\begin{cases} x_s = x_{s-1} + l_s \cos\varphi_s, \\ y_s = y_{s-1} + l_s \sin\varphi_s. \end{cases} \tag{6}$$

Условие замыкания при $l_{s+1} \neq 0$ примет вид

$$(x_s - x_0)^2 + (y_s - y_0)^2 = l_{s+1}^2. \tag{7}$$

Преобразование условия (7) с учетом (6) дает:

$$(x_{s-1} - x_0)\cos\varphi_s + (y_{s-1} - y_0)\sin\varphi_s = \frac{l_{s+1}^2 - l_s^2 - \rho_{s-1}^2}{2 l_s}, \tag{8}$$

где $\vec{\rho}_{s-1} = \{x_{s-1} - x_0;\ y_{s-1} - y_0\}$ – вектор, соединяющий точки M_0 и M_{s-1}.

Равенство (8) показывает, что угол φ_s не является обобщенной координатой рассматриваемой замкнутой системы точек M_0, M_1,…, M_s, поскольку в силу рекуррентных соотношений (6) φ_s зависит от предыдущих углов φ_{s-1}, φ_{s-2}, …, φ_0. Следовательно, число степеней свободы замкнутой системы точке меньше n для разомкнутой системы на единицу и равно $s + 1$.

Введем угол ψ между радиус-вектором $\vec{\rho}_{s-1}$ и осью Ox (рис. 2).

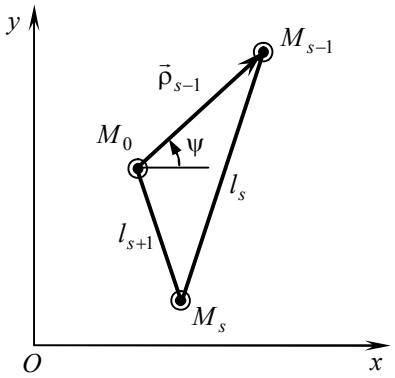

Рис. 2

Очевидно, что при $\rho_{s-1} \neq 0$ справедливы равенства

$$\begin{cases} \cos\psi = \dfrac{x_{s-1} - x_0}{\rho_{s-1}}, \\ \sin\psi = \dfrac{y_{s-1} - y_0}{\rho_{s-1}}. \end{cases} \tag{9}$$

После преобразования равенства (8) с учетом (9) можно получить явные выражения либо для $\cos\varphi_s$, либо для $\sin\varphi_s$:

$$\begin{cases} \cos\varphi_s = H \cdot \cos\psi \pm \sin\psi\sqrt{1 - H^2}, \\ \sin\varphi_s = H \cdot \sin\psi \mp \cos\psi\sqrt{1 - H^2}, \end{cases} \tag{10}$$

где $H = \dfrac{l_{s+1}^2 - l_s^2 - \rho_{s-1}^2}{2 l_s \rho_{s-1}}$ безразмерный параметр, зависящий от времени.

Заметим, что условие разрешимости (8) относительно φ_s записывается в виде

$$-1 \le H \le 1. \tag{11}$$

Дифференцируя равенства (6) с учетом (10) можно получить выражения проекций скорости точки M_s через обобщенные координаты и скорости замкнутой системы точек M_0, M_1, …, M_s.

Отметим, что для замыкания системы точек цепочечной структуры необходимо выполнения условия [1]

$$\sum_{k=0}^{s} \beta_k = \pi(s-1), \tag{12}$$

где β_k – внутренний угол в многозвеннике соответствующий вершине M_k.

Таким образом, получены условия (6), (10)–(12), необходимые для составления уравнений движения плоского замкнутого многозвенника.

Библиографический список

1. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике. М. 1962. 608 с.

2. *Вертипрахов И.А., Остапенко Е.Н., Репьях Н.А.* Динамика стержневой большой орбитальной космической системы цепочечной структуры // Вестник Пермского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Вып. 4(12). С. 42–47.

3. *Курская К.Н., Маланин В.В., Остапенко Е.Н., Репьях Н.А.* Динамика больших орбитальных космических систем (БОКС) // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. Пермь, 2012. Вып. 44. С. 42–48.

4. *Курская К.Н., Репьях Н.А.* О движении трехточечной стержневой системы // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. Пермь, 2006. Вып. 38. С. 8–13.

5. *Маланин В.В., Остапенко Е.Н., Репьях Н.А.* Влияние масс концевых точек на динамику пятимассовой большой орбитальной космической системы цепочечной структуры // Вестник Пермского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Вып. 4(27). С. 43–48.

6. *Маланин В.В., Остапенко Е.Н., Репьях Н.А.* Свободное движение пятиточечной стержневой большой орбитальной космической системы цепочечной структуры в транспортирующей системе координат // Вестник Пермского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Вып. 3(22). С. 59–62.