

УДК 62–50

Н.А. Стрелкова, О.С. Агибалова
Пермский государственный национальный
исследовательский университет
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
8 (342) 2-396-309

К ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ВРАЩЕНИЯМИ ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рассматриваются задачи оптимальной по энергетическим затратам стабилизации угловой скорости осевого вращения около заданного значения и гашения экваториальной составляющей угловой скорости динамически симметричного твердого тела при заданных ограничениях на вектор управляющего внешнего момента. Для решения задач применяется принцип максимума Л.С. Понтрягина.

Ключевые слова: оптимальное управление; вращение твердого тела; минимум энергетических затрат; принцип максимума Понтрягина.

Постановка задачи

Уравнения управляемого вращения динамически симметричного твердого тела относительно центра масс имеют вид [1]

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 + (I-1)\omega_2\omega_3 = u_1, & \omega_1(0) = \omega_1^0, \\ \dot{\omega}_2 - (I-1)\omega_1\omega_3 = u_2, & \omega_2(0) = \omega_2^0, \\ I\dot{\omega}_3 = u_3, & \omega_3(0) = \omega_3^0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $I = \frac{J_3}{J}$, J, J_3 ($J \neq J_3$) – главные центральные моменты инерции твердого тела (J – экваториальный, J_3 – осевой моменты инерции), ω_i ($i=1,2,3$) – проекции вектора угловой скорости на главные центральные оси инерции, $u_i = \frac{M_i}{J}$, M_i ($i=1,2,3$) – управляющие моменты.

В начальный момент времени $t = 0$:

$$\omega_1(0) = \omega_1^0, \omega_2(0) = \omega_2^0, \omega_3(0) = \omega_3^0. \quad (2)$$

Рассматривается задача стабилизации угловой скорости осевого вращения около заданного значения и одновременного гашения экваториальной составляющей угловой скорости, в конечный момент времени $t = T$:

$$\omega_1(T) = \omega_2(T) = 0, \omega_3(T) = \omega_3^T. \quad (3)$$

Предполагается, что управляющая функция u_3 не зависит от u_1, u_2 и удовлетворяет ограничению

$$|u_3| \leq u_3^0 = \text{const} > 0, \quad (4)$$

а управление изменением экваториальной составляющей угловой скорости осуществляется с помощью пары поворотных (верньерных) двигателей:

$$u_1^2 + u_2^2 \leq u^0{}^2, \quad u^0 = \text{const} > 0. \quad (5)$$

Требуется найти управляющие функции $u_i(t)$ ($i=1,2,3$), которые при $0 \leq t \leq T$ удовлетворяют уравнениям и граничным условиям (1)–(3), ограничениям (4), (5) и доставляют минимум функционалам энергетических затрат

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T u_3^2 dt, \quad (6)$$

$$K = \frac{1}{2} \int_0^T (u_1^2 + u_2^2) dt, \quad (7)$$

где время перехода T задано.

Стабилизация угловой скорости осевого вращения

Найдем управление, стабилизирующее угловую скорость осевого вращения ω_3 около заданного значения ω_3^T и доставляющее минимум функционалу (6) при условии (4). Для решения задачи воспользуемся принципом максимума Л.С. Понтрягина [4]. Составим функцию Гамильтона–Понтрягина:

$$H = \frac{\psi_0}{2} u_3^2 + \frac{\psi}{I} u_3. \quad (8)$$

Если $\psi_0 = 0$, то рассматриваемая задача по форме совпадает с задачей быстрогодействия. Тогда из условия максимума функции H получаем

$$u_3^* = u_3^0 \operatorname{sign} \psi, \quad (9)$$

а из сопряженного уравнения следует, что

$$\psi = C = \operatorname{const}. \quad (10)$$

Из соотношений (9), (10) и граничных условий (2), (3) найдем оптимальные выражения для u_3^* , ω_3 :

$$u_3^* = u_3^0 \operatorname{sign}(\omega_3^T - \omega_3^0), \quad (11)$$

$$\omega_3 = \frac{u_3^0}{I} t \operatorname{sign}(\omega_3^T - \omega_3^0) + \omega_3^0 \quad (12)$$

и минимальное время перевода осевой составляющей угловой скорости из начального состояния ω_3^0 в конечное ω_3^T :

$$T_{\min} = I \frac{|\omega_3^T - \omega_3^0|}{u_3^0}. \quad (13)$$

Отсюда следует, что в функционале (6) заданное время перехода T должно удовлетворять неравенству

$$T \geq T_{\min}. \quad (14)$$

Пусть теперь $\psi_0 \neq 0$. Без ограничения общности положим $\psi_0 = -1$ и преобразуем функцию Гамильтона–Понтрягина (8) к следующему виду

$$H = -\frac{1}{2}u_3^2 + \frac{\psi}{I}u_3 = -\frac{1}{2}\left(u_3 - \frac{\psi}{I}\right)^2 + \frac{\psi^2}{2I^2}. \quad (15)$$

Из условия максимума функции H и соотношений (8), (10), (15) следует, что если выполняется неравенство $\left|\frac{C}{I}\right| \leq u_3^0$, то оптимальное управление равно

$$u_3^* = \frac{I}{T}(\omega_3^T - \omega_3^0), \quad (16)$$

и время окончания процесса должно удовлетворять неравенству

$$T \geq I \frac{|\omega_3^T - \omega_3^0|}{u_3^0}. \quad (17)$$

Если $\left|\frac{C}{I}\right| \geq u_3^0$, то оптимальное по расходу энергии управление идентично управлению, оптимальному по быстродействию, определяется из соотношения (11) и время окончания процесса должно удовлетворять неравенству

$$T \leq I \frac{|\omega_3^T - \omega_3^0|}{u_3^0}. \quad (18)$$

Из соотношений (13), (14), (18) следует, что при выполнении условия $\left|\frac{C}{I}\right| \geq u_3^0$, рассматриваемая задача имеет решение только при

$$T = I \frac{|\omega_3^T - \omega_3^0|}{u_3^0} = T_{\min}.$$

Интегрируя третье уравнение в системе (1), учитывая граничные условия (2) и (3), определим зависимость угловой скорости ω_3 от времени

$$\omega_3 = \frac{\omega_3^T - \omega_3^0}{T}t + \omega_3^0 \quad (19)$$

и, подставляя u_3^* из (16) в выражение (6), вычислим значение функционала энергетических затрат

$$J = \frac{I^2 (\omega_3^T - \omega_3^0)^2}{2T}. \quad (20)$$

Используя соотношения (16) и (19) найдем оптимальное управление в форме синтеза

$$u_3^* = \frac{I}{T-t} (\omega_3^T - \omega_3^0). \quad (21)$$

Таким образом, если время окончания процесса $T \geq I \frac{|\omega_3^T - \omega_3^0|}{u_3^0}$, то решение рассматриваемой задачи описывается соотношениями (16), (19)–(21).

Если $T = I \frac{|\omega_3^T - \omega_3^0|}{u_3^0}$, то решение задачи можно представить также в эквивалентном виде (11), (12), при этом значении T затраты энергии $J = \frac{I u_3^0 |\omega_3^T - \omega_3^0|}{2}$. При $T < I \frac{|\omega_3^T - \omega_3^0|}{u_3^0}$ задача решения не имеет.

Принцип максимума является необходимым условием оптимальности. Докажем, что найденное решение доставляет абсолютный минимум функционалу (6), а именно, покажем, что при всех допустимых управлениях u_3 значение функционала удовлетворяет неравенству:

$$J \geq \frac{I^2 (\omega_3^T - \omega_3^0)^2}{2T}. \quad (22)$$

Проинтегрируем от 0 до T третье уравнение в системе (1):

$$\omega_3^T - \omega_3^0 = \frac{1}{I} \int_0^T u_3(t) dt.$$

Отсюда получаем

$$\left| \omega_3^T - \omega_3^0 \right| \leq \frac{1}{I} \int_0^T |u_3(t)| dt. \quad (23)$$

Воспользуемся интегральным неравенством Коши–Буняковского [5] $\left(\int_a^b f(t)g(t)dt \right)^2 \leq \int_a^b f^2(t)dt \cdot \int_a^b g^2(t)dt$. (24)

Пусть $a = 0$, $b = T$, $f(t) = 1$, $g(t) = |u_3(t)|$, тогда

$$\left(\int_0^T |u_3(t)| dt \right)^2 \leq T \int_0^T u_3^2(t) dt = 2TJ. \quad (25)$$

Используя неравенства (23), (25) получаем

$$\left(\omega_3^T - \omega_3^0 \right)^2 \leq \frac{2T}{I^2} J.$$

Отсюда следует справедливость неравенства (22).

Таким образом, $J_{\min} = \frac{I^2 (\omega_3^T - \omega_3^0)^2}{2T}$ и это значение достигается при управлении u_3^* , определяемом равенством (16).

Гашение экваториальной составляющей угловой скорости

Рассмотрим задачу оптимального гашения экваториальной составляющей угловой скорости динамически симметричного твердого тела при помощи управляющих моментов u_1 , u_2 .

С помощью замены переменных

$$\begin{aligned} \omega_1 &= a \cos \varphi - b \sin \varphi, \\ \omega_2 &= a \sin \varphi + b \cos \varphi, \quad \varphi = \int_0^t (I-1)\omega_3(t') dt' \end{aligned} \quad (26)$$

первые два уравнения системы (1) и краевые условия (2), (3) преобразуем к следующему виду [1, 2]

$$\begin{cases} \dot{a} = u_1 \cos \varphi + u_2 \sin \varphi, \\ \dot{b} = -u_1 \sin \varphi + u_2 \cos \varphi, \end{cases} \quad (27)$$

$$a(0) = \omega_1^0, \quad b(0) = \omega_2^0, \quad (28)$$

$$a(T) = b(T) = 0. \quad (29)$$

К задаче оптимального управления (27)–(29), (5), (7) применим принцип максимума Л.С. Понтрягина [4]. Имеем

$$\begin{aligned} H = \frac{\psi_0}{2} (u_1^2 + u_2^2) + (u_1 \cos \varphi + u_2 \sin \varphi) \psi_1 + \\ + (-u_1 \sin \varphi + u_2 \cos \varphi) \psi_2. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь H – функция Гамильтона–Понтрягина, ψ_1, ψ_2 – переменные, сопряженные a и b соответственно.

При $\psi_0 = 0$ приходим к задаче оптимального по быстродействию гашения экваториальной составляющей угловой скорости при ограничении (5) на управляющие моменты. Эта задача рассматривалась в работах [1, 2] при произвольной зависимости осевой составляющей угловой скорости от времени, а в работе [3] – при $\omega_3 = \text{const}$.

Без ограничения общности примем $\psi_0 = -1$ и преобразуем функцию Гамильтона–Понтрягина (30)

$$\begin{aligned} H = -\frac{1}{2} (u_1^2 + u_2^2) + u_1 (\psi_1 \cos \varphi - \psi_2 \sin \varphi) + \\ + u_2 (\psi_1 \sin \varphi + \psi_2 \cos \varphi) = -\frac{1}{2} [u_1 - (\psi_1 \cos \varphi - \psi_2 \sin \varphi)]^2 - \\ - \frac{1}{2} [u_2 - (\psi_1 \sin \varphi + \psi_2 \cos \varphi)]^2 + \frac{\psi_1^2 + \psi_2^2}{2}. \end{aligned}$$

Из условия максимума функции H следует, что если

$$\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2} \leq u^0, \quad (31)$$

то

$$u_1^* = \psi_1 \cos \varphi - \psi_2 \sin \varphi, \quad u_2^* = \psi_1 \sin \varphi + \psi_2 \cos \varphi; \quad (32)$$

если

$$\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2} \geq u^0, \quad (33)$$

то

$$u_1^* = u^0 \frac{\psi_1 \cos \varphi - \psi_2 \sin \varphi}{\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}}, \quad u_2^* = u^0 \frac{\psi_1 \sin \varphi + \psi_2 \cos \varphi}{\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}}. \quad (34)$$

Из сопряженной системы получаем

$$\psi_1 = C_1, \quad \psi_2 = C_2. \quad (35)$$

Рассмотрим ситуацию, когда выполняется неравенство (31). Подставим выражения (35) в соотношения (32), а (32) – в правые части системы (27). Найдем общее решение данной системы уравнений и, учитывая краевые условия (28), (29), постоянные C_1 , C_2 , а затем определим функции $a(t)$, $b(t)$ и управления u_1^* , u_2^* :

$$C_1 = -\frac{\omega_1^0}{T}, \quad C_2 = -\frac{\omega_2^0}{T}, \quad (36)$$

$$a = \omega_1^0 \left(-\frac{t}{T} + 1 \right), \quad b = \omega_2^0 \left(-\frac{t}{T} + 1 \right), \quad (37)$$

$$u_1^* = \frac{\omega_2^0 \sin \varphi - \omega_1^0 \cos \varphi}{T}, \quad u_2^* = -\frac{\omega_1^0 \sin \varphi + \omega_2^0 \cos \varphi}{T}. \quad (38)$$

Подставим равенства (38) в функционал (7) и вычислим энергетические затраты

$$K = \frac{\omega_1^{02} + \omega_2^{02}}{2T}. \quad (39)$$

Из соотношений (31), (36) следует, что для рассматриваемого случая время окончания процесса должно удовлетворять неравенству

$$T \geq \frac{\sqrt{\omega_1^{02} + \omega_2^{02}}}{u^0}. \quad (40)$$

Используя соотношения (26), (37) и (38) найдем угловые скорости $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ и оптимальные управления в форме синтеза

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \left(1 - \frac{t}{T}\right) (\omega_1^0 \cos \varphi - \omega_2^0 \sin \varphi), \\ \omega_2 &= \left(1 - \frac{t}{T}\right) (\omega_1^0 \sin \varphi + \omega_2^0 \cos \varphi),\end{aligned}\tag{41}$$

$$\begin{aligned}u_1^* &= -\frac{\sqrt{\omega_1^{02} + \omega_2^{02}}}{T} \frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} = -\frac{\omega_1}{T-t}, \\ u_2^* &= -\frac{\sqrt{\omega_1^{02} + \omega_2^{02}}}{T} \frac{\omega_2}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} = -\frac{\omega_2}{T-t}.\end{aligned}\tag{42}$$

Пусть теперь выполняется неравенство (33). Поступая аналогичным образом, используя соотношения (34), (35), (27)–(29), получаем, что в этом случае рассматриваемая задача имеет решение лишь при

$$T = \frac{\sqrt{\omega_1^{02} + \omega_2^{02}}}{u^0}.\tag{43}$$

При этом значении T функции $a(t)$, $b(t)$ имеют прежний вид (37), а управления u_1^* , u_2^* и затраты энергии можно представить в эквивалентном выражениям (42), (39) виде

$$\begin{aligned}u_1^* &= -u^0 \frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}, \\ u_2^* &= -u^0 \frac{\omega_2}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}, \\ K &= \frac{1}{2} u^0 \sqrt{\omega_1^{02} + \omega_2^{02}}.\end{aligned}$$

При $T < \frac{\sqrt{\omega_1^{02} + \omega_2^{02}}}{u^0}$ задача решения не имеет.

Отметим, что время T , определяемое из формулы (43), совпадает с временем оптимального по быстродействию гашения экваториальной составляющей угловой скорости [1, 2].

Покажем, что полученное решение доставляет абсолютный минимум функционалу энергетических затрат (7).

Введем в рассмотрение два вектора

$$\bar{\zeta}(t) = \left(\frac{a(t)}{\sqrt{a^2(t) + b^2(t)}}, \frac{b(t)}{\sqrt{a^2(t) + b^2(t)}} \right), \quad \bar{v}(t) = (v_1(t), v_2(t)),$$

где $v_1(t) = u_1(t) \cos \varphi + u_2(t) \sin \varphi$, $v_2(t) = -u_1(t) \sin \varphi + u_2(t) \cos \varphi$,
причем $v_1^2 + v_2^2 = u_1^2 + u_2^2$. Тогда, учитывая (27), получаем

$$\frac{d\sqrt{a(t)^2 + b(t)^2}}{dt} = (\bar{v}(t), \bar{\zeta}(t)).$$

Проинтегрируем это уравнение и воспользуемся краевыми условиями (28), (29):

$$-\sqrt{\omega_1^{02} + \omega_2^{02}} = \int_0^T (\bar{v}(\tau), \bar{\zeta}(\tau)) d\tau.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sqrt{\omega_1^{02} + \omega_2^{02}} &\leq \int_0^T |(\bar{v}(t), \bar{\zeta}(t))| dt \leq \int_0^T \sqrt{v_1^2(t) + v_2^2(t)} |\bar{\zeta}(t)| dt = \\ &= \int_0^T \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)} dt. \end{aligned}$$

Следовательно

$$\omega_1^{02} + \omega_2^{02} \leq \left(\int_0^T \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)} dt \right)^2.$$

Так же, как и в предыдущем пункте воспользуемся интегральным неравенством Коши–Буняковского, полагая $f(t) = 1$,

$$g(t) = \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)}. \text{ Тогда } \omega_1^{02} + \omega_2^{02} \leq T \int_0^T (u_1^2(t) + u_2^2(t)) dt = 2TK.$$

Отсюда

$$K \geq \frac{\omega_1^{02} + \omega_2^{02}}{2T}.$$

Следовательно $K_{\min} = \frac{\omega_1^{02} + \omega_2^{02}}{2T}$ и оно достигается при u_1^*, u_2^* ,

определяемых соотношениями (38), (42).

Таким образом, решение задачи оптимального по энергетическим затратам управления гашением экваториальной составляющей угловой скорости определяется соотношениями (39)–(42). При оптимальном движении управляющий момент имеет направление, противоположное направлению вектора экваториальной угловой скорости, модуль управляющего момента и затраты энергии прямо пропорциональны модулю начального значения вектора экваториальной угловой скорости и обратно пропорциональны времени разворота твердого тела.

Заключение

Получено точное аналитическое решение задач оптимальной по энергетическим затратам стабилизации угловой скорости осевого вращения около заданного значения и гашения экваториальной составляющей угловой скорости динамически симметричного твердого тела. С использованием принципа максимума Л.С. Понтрягина для каждой из задач в аналитическом виде найдены оптимальные управления в форме синтеза, угловые скорости, минимальные значения критериев оптимальности.

Библиографический список

1. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 384 с.
2. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 368 с.
3. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968. 764 с.
4. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.
5. Математическая энциклопедия. Т. 1. М.: Советская энциклопедия, 1977. 1151 с.