ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ
Нелинейные динамические системы

Вып. 50 **Межвузовский сборник научных трудов** **2018**

УДК 531. 38: 534.1

Н. Н. Макеев
Институт проблем точной механики и управления РАН
Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, 24
nmakeyev@mail.ru; (845) 272-35-33

РЕЗОНАНСНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ОСЦИЛЛЯТОРОВ В КОНСЕРВАТИВНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ. 1

Рассматривается задача об асимптотическом интегрировании системы канонических уравнений, характеризующей движение консервативной механической системы при воздействии малых возмущений. Данная система моделируется совокупностью взаимодействующих осцилляторов, находящихся в режиме нелинейного резонанса с квадратичной нелинейностью. Получено интегральное многообразие гамильтоновой системы в канонических переменных.

Ключевые слова: консервативная механическая система; система осцилляторов; нелинейный резонанс; интегральное многообразие.

Введение

Проблема динамического взаимодействия осцилляторов, находящихся на нелинейных стационарных удерживающих связях в консервативной механической системе, составляет актуальную задачу теории нелинейных колебаний. В основу методов исследования таких задач положены труды А. Пуанкаре [1].

Актуальность этой проблемы обусловлена существованием класса задач, являющихся носителями универсального свойства структурной изоморфности. Это свойство проявляется в том, что при определённых условиях для задач, поставленных в различных разделах науки, возможно применение существующих общих для них математических моделей. Эти модели, построенные для реальных объектов различной природы, отражают качественно однотипные эволюционные процессы, обусловленные динамическими свойствами данных объектов.

Так, например, в консервативной механической системе со слабой нелинейностью резонансное взаимодействие связанных осцилляторов при наличии комбинационного резонанса может моделировать следующие процессы:

• движение свободного от связей абсолютно твёрдого тела относительно центра масс;

• волновое движение в сплошной среде с определённой дисперсионной характеристикой и резонансным волновым вектором (при трёхволновом или триадном квадратичном резонансе с условиями синхронизма [1, 2]);

• квантовое взаимодействие квазичастиц с проявлениями распадной неустойчивости и взрывной неустойчивости в плазме [3], а также в активных диспергирующих средах [4].

Класс структурно изоморфных задач в различных областях науки (механике, теоретической физике, математической биологии, химической кинетике и др.) весьма широк. Эти применения − лишь некоторые из многих возможных примеров-представителей этого класса, отражающих соответствующие динамические аналогии [5, 6].

1. Основные предпосылки

Рассмотрим свободную от внешних связей консервативную механическую систему с n степенями свободы. Обозначим

$$\mathbf{q} = [q_1 \dots q_n]^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{p} = [p_1 \dots p_n]^{\mathrm{T}}, \quad H = H(q, p),$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = col\left[\frac{\partial H}{\partial q_1} \dots \frac{\partial H}{\partial q_n}\right], \quad \frac{\partial H}{\partial p} = col\left[\frac{\partial H}{\partial p_1} \dots \frac{\partial H}{\partial p_n}\right],$$

где q_j , p_j – обобщённые координаты и обобщённые импульсы данной системы ($j = 1, \dots , n$); col – символ вектор-столбца. Упорядоченное множество этих $2n$ величин параметризует данную систему в чётномерном фазовом пространстве.

Состояние данной механической системы в текущей точке $N(q, p)$ фазового пространства определяется уравнениями Гамильтона в канонических переменных

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{1}$$

с первым (энергетическим) интегралом [8]

$$H(q, p) = h \qquad (h = const), \tag{2}$$

где $H(q, p)$ − функция Гамильтона.

Пусть H − функция, голоморфная по q, p в окрестности точки $N(0, 0)$ фазового пространства, причём

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial H}{\partial p} = 0 \quad \text{при} \quad q = p = 0. \tag{3}$$

В силу условий (3) гамильтониан H не содержит слагаемых, линейных по переменным q, p.

Для дальнейшего предполагается, что существует функция $V(q, p)$ такая, что

$$H(q, p) = \frac{1}{2}[q \;\; p]\,\mathbf{A}\begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} + V(q, p), \tag{4}$$

где $\mathbf{A}$ − заданная положительно определённая симметрическая числовая матрица, а функция V, представленная рядом по степеням переменных q, p, не содержит степеней ниже третьей.

В силу выражения (4) *гамильтонова система* (ГС) (1) и её первый интеграл (2) представимы в виде

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ -\dot{p} \end{bmatrix} = \mathbf{A}\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} + col\left[\frac{\partial V}{\partial p} \;\; \frac{\partial V}{\partial q}\right], \tag{5}$$

$$[q \;\; p]\,\mathbf{A}\begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} + 2V(q, p) = 2h. \tag{6}$$

Согласно равенству (6) энергетическая постоянная h определяется значением функции V в точке $N(0, 0)$: $h = V(0, 0)$.

Характеристическое уравнение линейной подсистемы ГС (5) в зависимости от величин элементов матрицы **A** определяет тип траекторий и локальную топологию данной системы по А. Пуанкаре [1] в окрестности точки $N(0, 0)$.

На основе динамической аналогии, предложенной в работе [9], сопоставим данной механической системе гипотетическую систему n нелинейных взаимодействующих осцилляторов и примем её в качестве *аналоговой структурно-динамической модели.*

Поставим следующую **ограниченную задачу:** построить в канонических переменных алгоритм асимптотического интегрирования ГС (5), характеризующей движение консервативной механической системы, принимая следующие ограничения.

- Предполагается, что аналоговая структурно-динамическая модель, поставленная в соответствие данной механической системе, *динамически эквивалентна* этой системе.
- Модельная *динамическая система* (ДС) по характеру взаимодействия осцилляторов находится в режиме *нелинейного резонанса* с квадратичной нелинейностью.
- Состояние модельной ДС является динамически *невырожденным* (регулярным).

В последнем ограничении исключается состояние ДС, при котором характер её движения является неопределённым.

2. Осцилляции системы при нелинейном внутреннем резонансе

Рассмотрим регулярное состояние модельной ДС, определяемое при малых возмущениях гамильтонианом

$$H_*(q, p, \mu) = H_0(q, p) + \mu V(q, p), \tag{7}$$

где $0 < \mu \le 1$ − параметр возмущения; $H_0(q, p)$ − первое слагаемое гамильтониана (4), соответствующее невозмущённому состоянию системы (далее индекс $*$ при величине H_* опущен).

Гамильтониану (7) соответствует возмущённая ДС

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ -\dot{p} \end{bmatrix} = \mathbf{A}\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} + \mu\, col\left[\frac{\partial V}{\partial p} \;\; \frac{\partial V}{\partial q}\right], \qquad (8)$$

близкая к невозмущённой ГС (5) и тождественно совпадающая с ней при $\mu = 1$.

Производя над ДС (8) преобразование нормализации [10] вида $(q, p) \to x_j$ ($j = 1, \ldots, n$), приведём её к виду *канонической системы А.М. Ляпунова*

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\,\mathbf{x} = \mu\,\mathbf{F}(\mathbf{x}). \qquad (9)$$

Здесь $\mathbf{x} = [x_1 \;\ldots\; x_n]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{B} = diag\,(\Omega_1^2,\ldots,\Omega_n^2)$ − матрицы нормальных координат и собственных (нормальных) частот ДС, соответственно; $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [F_1(\mathbf{x}) \ldots F_n(\mathbf{x})]^{\mathrm{T}}$ − матрица с элементами $F_j(\mathbf{x})$ внешнего нелинейного воздействия на ДС; μ − безразмерный малый параметр.

Рассмотрим ДС с тремя степенями свободы ($n = 3$). Вследствие нелинейного квадратичного взаимодействия осцилляторов в данной системе помимо частот Ω_j ($j = 1, 2, 3$) возникают дополнительные, *комбинационные частоты* вида [11, с. 268]

$$\Omega_k = \Omega_r \pm \Omega_s \qquad (k, r, s = 1, 2, 3), \qquad (10)$$

где значения k, r, s − все различные.

При слабой нелинейности динамическое взаимодействие трёх осцилляторов в системе с сосредоточенными параметрами может являться эффективным лишь при выполнении характерного условия (10). Очевидно, что без нарушения общности в правой части равенства (10) можно знак “минус” заменить на “плюс” [11].

Частоты, определяемые равенствами (10), влияют на характер динамического взаимодействия осцилляторов в случае, при котором амплитуды колебаний с комбинационными частотами по величине достаточно велики. Данное условие реализуется, если эти частоты − *резонансные* (близкие к нормальным частотам этой системы). В силу этого нормальные частоты ДС должны удовлетворять одному из резонансных условий типа (10) (*условий синхронизма* [3, с. 554; 11, с. 279].

Применяя для интегрирования ДС (9) при $n = 3$ метод асимптотического интегрирования (*метод Ван дер Поля*) [12], ищем её решение в виде

$$\mathbf{x}(t, \mu) = \mathbf{u}(\tau)\, Exp\, \boldsymbol{\sigma}(t) + \mu\, \mathbf{v}(t). \tag{11}$$

В равенстве (11) обозначено

$$\mathbf{u}(\tau) = diag\,[u_1(\tau), u_2(\tau), u_3(\tau)],$$

$$Exp\, \boldsymbol{\sigma}(t) = [\exp \sigma_1(t) \ldots \exp \sigma_3(t)]^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{v}(t) = [v_1(t)\ v_2(t)\ v_3(t)]^{\mathrm{T}}, \quad u_j = w_j \exp(i\theta_j),$$

$$\sigma_j = i\Omega_j t \quad (j = 1, 2, 3), \quad \tau = \mu t.$$

Здесь $\mathbf{u}$ − вектор амплитуд; u_j − амплитуда колебания осциллятора номера j; w_j, θ_j − функции данной амплитуды и фазы колебаний; v_j − поправки, характеризующие степень отклонения приближённого решения от существующего точного решения [11]; i − мнимая единица.

Введём оператор $\mathbf{G}$, который, действуя на вектор $\mathbf{b} = [b_1\, b_2\, b_3]^{\mathrm{T}}$, порождает кососимметрическую матрицу

$$\mathbf{G}(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & -b_2 \\ -b_1 & 0 & b_3 \\ b_2 & -b_3 & 0 \end{bmatrix},$$

а также векторы $\mathbf{w} = [w_1\ w_2\ w_3]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{g} = [a_1 w_1\ \ a_2 w_2\ \ a_3 w_3]^{\mathrm{T}}$. Здесь a_j − характерные существенно положительные постоянные данной ДС такие, что $a_1 > a_2 > a_3$ или $a_1 < a_2 < a_3$.

Применим к ДС (9) выражение (11) и на основе принятого метода проведём её усреднение. При этом усреднении отброшенные аддитивные осциллирующие компоненты приводят лишь к малым осцилляциям, налагающимся на дрейф, определяемый усреднённой ДС. Этот дрейф за время $\mathrm{O}(\mu^{-1})$ изменяет вектор $\mathbf{x}$ усреднённой ДС на величину не более чем $\mathrm{O}(1)$.

В результате усреднения при условиях *комбинационного* (*триадного* [3]) *резонанса* (10) для $\theta_3 - \theta_2 - \theta_1 = \pi/2$ получаем

$$\mathbf{G}(\dot{\mathbf{g}}) = \mathbf{G}(\mathbf{g})\mathbf{G}(\mathbf{w}) - \mathbf{G}(\mathbf{w})\mathbf{G}(\mathbf{g}). \qquad (12)$$

Определяющее уравнение (12) представляет *основную динамическую систему* (ОДС) данной задачи, представленную в обобщённой **G**-операторной форме.

3. Геометрические свойства движения осциллирующей системы

Определим характер фазовых траекторий ОДС (12) в пространстве квазикоординат w_1, w_2, w_3 (**w**-пространстве). Пусть в дальнейшем $\mathbf{\Omega} = diag\,(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$, $\Omega_j > 0\;(j = 1, 2, 3)$.

Уравнение

$$\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Omega}\,\mathbf{w} = h_0 \quad (h_0 = const > 0) \qquad (13)$$

в **w** – пространстве на ненулевом уровне определяет центральную поверхность второго порядка. Соотношение (13) в метрическом фазовом пространстве устанавливает однопараметрическое (с параметром h_0) множество гомотетичных эллипсоидов с длинами полуосей $\sqrt{h_0\Omega_j^{-1}}$, соответственно.

Введём в метрическом **w**-пространстве цилиндрические поверхности с уравнениями

$$w_j^2 + w_3^2 = k_j^2 \;\; (j = 1, 2), \qquad w_1^2 - w_2^2 = k_3^2, \qquad (14)$$

где k_j − фиксированные действительные постоянные такие, что $k_1 > (k_2, k_3) > 0$. Фазовые траектории ОДС (12) расположены в точках пересечения эллипсоида (13) (при фиксированном значении параметра h_0) с соответствующими поверхностями (14).

В окрестностях осей w_1, w_2, пересекающих эллипсоид (13) при фиксированном значении h_0, фазовые траектории являются эллипсами. В силу этого каждая из мод колебаний w_1, w_2 при малом возмущении совершает малые колебания в окрестности заданных начальных значений. В точке пересечения оси w_3 с эллипсоидом (13) расположено седло, через которое проходит сепаратриса. Она является фазовой траекторией, разделяющей области различных по характеру движений данной системы. В окрестности этой точки характер фазовых траекторий неустойчив; мода максимальной частоты (распадная мода w_3) может распадаться, полностью передавая энергию модам w_1, w_2.

Нулевому уровню интеграла (13) в $\mathbf{w}$-пространстве соответствует распадное интегральное многообразие, которое в дальнейшем не рассматривается.

Таким образом, решение поставленной задачи, определяемое структурой выражения (11), сводится к построению интегрального многообразия ОДС (12) на основе модели возмущённой ГС.

4. Интегральные многообразия невозмущённой системы в канонических переменных

Введём систему канонических переменных Андуайе-Депри [13−14] (переменных "*действие − угол*"). Эти переменные применяются в случае компактного многообразия уровня первых интегралов $H_j(q, p) = h_j \qquad (j = 1, \ldots, n)$ и являются предпочтительными для интегрирования динамических систем, близких по структуре к гамильтоновым системам, интегрируемым по Буру-Лиувиллю [15].

4.1. *Задача Пуанкаре для гамильтоновой системы*

В переменных "действие I − угол φ" гамильтониан (7) задаётся в виде [16]

$$H(I, \varphi, \mu) = H_0(I) + \mu H_1(I, \varphi), \tag{15}$$

где $I \in \mathbf{R}^n$; $\varphi \bmod 2\pi \in \mathbf{T}^n$; $0 < \mu \le 1$ − заданный малый параметр; H_1 есть 2π - периодическая функция угловых переменных $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Задачу об исследовании движений ГС, заданной гамильтонианом (15) (задачу о влиянии малых возмущений на интегрируемую ГС), А. Пуанкаре назвал *основной задачей динамики* [1]. Выполняя преобразование переменных $(q,p) \to (I,\varphi)$, представим каноническую систему (1) в виде [15]

$$\dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}, \qquad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial I}. \tag{16}$$

Постановка ограниченной задачи А. Пуанкаре для ГС (16) сводится к следующему. Исследовать для невырожденных случаев движения фазовые траектории ГС (16) в фазовом пространстве, являющемся прямым произведением области в пространстве $\mathbf{R}^\mathbf{n}$ с координатами $\mathbf{I} = [I_1 \dots I_n]^\mathrm{T}$ и n - мерного тора с угловыми координатами $\varphi = [\varphi_1 \dots \varphi_n]^\mathrm{T}$. □

4.2. *Переход к переменным "действие – угол"*

Введём канонические переменные Андуайе–Деприи: обобщённые координаты − углы $\ell, \varphi_2, \varphi_3$ и соответствующие им обобщённые импульсы L, I_2, I_3, образующие фазовое пространство. Обозначим $a_i = a\rho_i$ $(i = 1, 2)$, где $a > 0$ − характерный параметр системы; ρ_i − величины с размерностями длины.

Рассмотрим невозмущённую ГС с числом степеней свободы $n = 3$ и функцией Гамильтона

$$H_0(\ell, L, I_2) = \frac{1}{2}\left[Q(\ell) I_2^2 + \left(\frac{1}{a_3} - Q(\ell)\right) L^2\right]. \qquad (17)$$

Здесь $Q(\ell)$ − приведённая к параметру a кривизна нормального сечения некоторой гипотетической поверхности конфигурационного пространства системы, для которой ρ_1, ρ_2 − главные радиусы кривизны, а ℓ − угол между плоскостью нормального сечения, соответствующего радиусу ρ_2, и плоскостью данного нормального сечения [17][1]. Эта поверхность является родственной эллипсоиду (13).

Из переменных "действие–угол" используем только величины $I = [L \;\; I_2]^\mathrm{T}$, $\varphi = [\ell \;\; \varphi_2]^\mathrm{T}$, образующие четырёхмерное фазовое пространство; здесь величины I_3, φ_3 являются постоянными. В этом случае ГС (16) с гамильтонианом (17) в переменных I, φ,

---

[1]Здесь подразумевается формула Эйлера для кривизны нормального сечения поверхности, представленная в форме Дюпена [18].

содержащая четыре уравнения, имеет однозначные первые интегралы

$$H_0 = h_1, \qquad I_2 = h_2, \tag{18}$$

где h_1, h_2 − постоянные интегрирования.

В силу интегралов (18), находящихся в инволюции, данная задача, согласно теореме Бура–Лиувилля [15], сводится к задаче о движении ГС с одной степенью свободы.

Из соотношений (17), (18) следует

$$L^2 = \frac{I_2^2}{D_0}\left[1 - \frac{Dr_2}{r_1 + (ak)^{-1}}\right], \tag{19}$$

где обозначено

$$D = m_1\frac{2a_3h_1 - h_2^2}{h_2^2 - 2a_1h_1} \geq 0, \quad k = \frac{m_1 - m_2}{m_1(m_2 - 1)} > 0, \quad D_0 = 1 + D,$$

$$m_i = \frac{a_i}{a_3}, \quad r_i = \frac{\partial Q}{\partial k_i}, \quad k_i = \frac{1}{\rho_i} \quad (i = 1, 2),$$

k_i − главные кривизны указанной гипотетической поверхности.

Согласно выражению (19) функция L является π-периодической по ℓ и при $D = 0$ равна

$$L = \pm h_2. \tag{20}$$

Это − предельное критическое значение, для которого при $2a_1h_1 \neq h_2^2$ величины h_1, h_2 связаны равенством $2a_3h_1 - h_2^2 = 0$. В этом случае вектор кинетического момента системы коллинеарен одной из её главных осей инерции и система совершает перманентное вращение вокруг главной оси с наибольшим моментом инерции.

Библиографический список

1. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики. Избранные труды: в 3 т. М.: Наука. Т. 2, 1972. 999 с.

2. *Хохлов Р.В.* О распространении волн в нелинейных диспергирующих линиях // Радиотехника и электроника. 1961. Т. 6. С. 1116.

3. *Додд Р. и др.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694 с.

4. *Вильхельмссон Х., Вейланд Л.* Когерентное нелинейное взаимодействие волн в плазме. М.: Энергоиздат, 1981. 264 с.

5. *Кияшко С.В. и др.* Взрывная неустойчивость и генерация солитонов в активной среде // Журнал технической физики. 1972. Т. 42. С. 2458−2465.

6. *Голдстейн Г.* Классическая механика. М.: Гостехиздат, 1957. 408 с.

7. *Уёмов А.И.* Аналогия в практике научного исследования. Из истории физико-математических наук. М.: Наука, 1970. 264 с.

8. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 278 с.

9. *Junkins J.L., Jacobson I.D., Blanton J.N.* A nonlinear oscillator analog of rigid body dynamics // Celestial Mechanics. 1973. Vol. 7, № 4. P. 398−407.

10. *Макеев Н.Н.* Нормализация уравнений вращения твёрдого тела // Вестник Саратовского государственного технического ун-та. 2004. № 2(3). С. 37−43.

11. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.

12. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969. 380 с.

13. *Andoyer M.H.* Cours de mecanique celeste. Paris: Gauthier-Villars, 1923. T. 1. 440 p.; 1926. T. 2. 454 p.

14. *Деприт А.* Изучение свободного вращения твёрдого тела около неподвижной точки с помощью фазовой плоскости // Механика. Периодический сборник переводов иностранных статей. 1968. № 2. С. 3−9 / Оригинал: *Deprit A.* American Journal of Physics and Applications. 1967. Vol. 35, № 5. P. 424−428.

15. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 432 с.

16. *Джакалья Г.Е.* Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 320 с.

17. *Погорелов А.В.* Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1969. 176 с.

18. *Выгодский М.Я.* Дифференциальная геометрия. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 512 с.