ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ
Нелинейные динамические системы

Вып. 50 Межвузовский сборник научных трудов 2018

УДК 531. 381; 517.925.5

Н. Н. Макеев
Институт проблем точной механики и управления РАН
Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, 24
nmakeyev@mail.ru; (845) 272-35-33

ПРОБЛЕМА ВЕРИФИКАЦИИ ОДНОЗНАЧНОСТИ ИНТЕГРАЛОВ В ДИНАМИКЕ ГИРОСТАТА

Рассматривается ограниченная задача об установлении однозначности (или неоднозначности) первых интегралов системы уравнений движения гиростата, обладающего осевой структурно-динамической симметрией, телоноситель которого вращается вокруг неподвижного полюса. Гиростат движется в центральном стационарном ньютоновском гравитационном поле при условии, что расстояние между точечным гравитирующим центром и неподвижным полюсом намного больше наибольшего характерного размера носителя гиростата. Установлена неоднозначность интеграла движения.

Ключевые слова: гиростат; интеграл движения; ньютоновское гравитационное поле; однозначность решения.

1. Предварительные положения

Задача об однозначности решений системы уравнений движения твёрдого тела вокруг неподвижного полюса в стационарных силовых полях исторически проистекает из вопроса об интегрируемости в квадратурах системы уравнений Эйлера–Пуассона. Этот вопрос, в свою очередь, сводится к проблеме существования независимого первого дополнительного по Е. Уиттекеру [1] алгебраического интеграла данной системы, находящегося в инволюции по отношению ко всем остальным её интегралам [2].

Как известно [3, с. 157−187], для системы уравнений классической задачи о движении твёрдого тела вокруг неподвижного полюса доказана центральная теорема, согласно которой независимый дополнительный первый интеграл данной системы существует только в трёх определённых случаях интегрируемости. Эти случаи соответствуют существованию решений уравнений Эйлера–Пуассона, однозначных на всей плоскости комплексного времени и являются классическими случаями Эйлера, Лагранжа и Ковалевской для однородного поля силы тяжести.

Проблема однозначности решений исследовалась и для задач о движении твёрдого тела в центральном ньютоновском гравитационном поле при условии, что расстояние R от центра притяжения поля до неподвижного полюса тела намного больше наибольшего характерного линейного размера этого тела. Это ограничение позволяет разложить потенциальную функцию U данного поля в ряд по степеням малого параметра $\rho = \mu R^{-1}$ (здесь μ − заданный маркировочный множитель, имеющий размерность длины).

Подобные задачи интегрирования были поставлены и решены с применением аналитического выражения для функции U, в разложении которой по степеням параметра ρ были удержаны аддитивные слагаемые до порядка ρ включительно [4, 5]. В этих работах было установлено, что независимый дополнительный алгебраический первый интеграл существует только в случаях, являющихся аналогами классических случаев Эйлера и Лагранжа.

Из работы [6] следует, что нахождение всех возможных случаев, при которых интегралы системы уравнений, составленной для функции U, линейной относительно параметра ρ, не приводит к каким-либо новым случаям существования однозначных интегралов, а сводится к исследованию решений в указанных выше двух случаях.

В работе [7] рассмотрена задача о поиске однозначных решений для случая, аналогичного классическому случаю Лагранжа, при котором в разложении аналитического выражения потенциальной функции U удержаны аддитивные члены до порядка ρ^2 включительно. В результате было установлено, что решение системы уравнений движения твёрдого тела вокруг неподвижного полюса в этом случае не является однозначным. Это утверждение основано на том, что определяющее уравнение задачи имеет квадратурный интеграл, являющийся ультраэллиптическим интегралом, обращение которого (с целью получения явной формы решения) не приводит к однозначной функции [8].

В настоящей работе данная задача, решённая для твёрдого тела [7], обобщена на случай движения гиростата, к которому применены аналогичные структурно-динамические условия и принята идентичная аппроксимирующая модель центрального ньютоновского гравитационного поля.

2. Основные предпосылки

Твёрдотельный гиростат с заданным постоянным гиростатическим моментом $\boldsymbol{k}$ движется в центральном ньютоновском гравитационном поле так, что его неизменяемая основа (*тело-носитель*) движется вокруг неподвижного полюса O.

Введём правые координатные ортобазисы с общим началом в полюсе O: неподвижный (относительно инерциального пространства) базис $Z\,(O\,z_1 z_2 z_3)$ и подвижный $X\,(O x_1 x_2 x_3)$, оси которого направлены по главным в полюсе O направлениям тензора инерции гиростата (*главный координатный базис*).

Пусть $\mathbf{s}\,(s_1, s_2, s_3)$ − опорный направляющий орт, неизменно связанный с координатным базисом Z, устанавливающий ориентирование базиса X относительно базиса Z.

Обозначим: $\mathbf{A} = diag\,(A_1, A_2, A_3)$ − матрица тензора инерции гиростата, отнесённого к полюсу O; M − масса гиростата, распределённая в области W с объёмом V; $\sigma(\mathbf{r})$ − локальная плотность массы гиростата; g − стандартное значение величины ускорения силы тяжести; $\mathbf{k}\,(k_1, k_2, k_3)$ − гиростатический момент, заданный в базисе X; $P = Mg$; $\boldsymbol{\omega}\,(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ − абсолютная угловая скорость носителя гиростата; $\boldsymbol{r}$ − радиус-вектор, проведённый из полюса O в текущую точку области W; $\mathbf{r}_c\,(r_1, r_2, r_3)$ − радиус-вектор центра масс гиростата. Здесь и всюду далее координаты всех векторов и элементы матрицы $\boldsymbol{A}$ отнесены к координатным осям базиса X.

Для дальнейшего положим

$$A_{pqr} = \iiint\limits_W \sigma(\mathrm{r})\, x_p\, x_q\, x_r\, dV \qquad (p, q, r) = (1, 2, 3),$$

$$m = \frac{3}{2} g\,, \quad \Phi_1(\mathrm{s}) = \sum_{k=1}^{3} A_{kkk}\, s_k^3 + 6\, A_{123}\, s_1 s_2 s_3\,,$$

$$\Phi_2(\mathrm{s}) = \sum_{p=2,3} A_{1pp}\, s_1 s_p^2 + \sum_{q=1,3} A_{2qq}\, s_2 s_q^2 + \sum_{r=1,2} A_{3rr}\, s_3 s_r^2\,,$$

$$\mathrm{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad a_j = \sum_{k=1}^{3} A_{jkk} \quad (j = 1, 2, 3),$$

где $\mathbf{a}$ − гипотетический вектор, заданный координатами a_j в осях координатного базиса X. Здесь и всюду далее A_{pqr} − инерционные моменты третьей степени, порождаемые $\mathbf{s}$-тернарными кубическими формами Φ_1, Φ_2.

Принимая ограничение относительно удалённости гравитирующего центра до полюса O, упомянутое выше, разложим потенциал U данного поля [9] в ряд по степеням параметра ρ в окрестности значения $\rho = 0$. В результате согласно [7, 10] с точностью до порядка ρ^n (n = 1, 2, …) получаем

$$\begin{aligned} U(\mathbf{s}, \rho) = &- P(\mathbf{r}_c \cdot \mathbf{s}) - m(\mathbf{s}^T \cdot \mathbf{A}\mathbf{s})\,\rho + m\,\{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{s}) - \\ &- \frac{5}{3}[\Phi_1(\mathbf{s}) + 3\,\Phi_2(\mathbf{s})]\}\,\rho^2 + \ldots + \mathrm{O}(\rho^n), \end{aligned} \tag{1}$$

где O − символ порядка величины. Здесь Φ_1, Φ_2 − кубические формы, выражения для которых представлены выше.

Для дальнейшего обозначим через $U_n(\mathbf{s}, \rho)$ функцию, полученную из выражения (1), в котором отброшены аддитивные члены порядка выше ρ^n $(n \geq 1)$.

Система уравнений движения гиростата вокруг неподвижного полюса O в потенциальном силовом поле с потенциалом $U(\mathbf{s})$, а также её первые алгебраические интегралы, известны (например, [11]). В силу этого система приближённых уравнений движения для поля с потенциалом U_n имеет вид

$$A_1\dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2)\,\omega_2\omega_3 + k_3\omega_2 - k_2\omega_3 = s_3\frac{\partial U_n}{\partial s_2} - s_2\frac{\partial U_n}{\partial s_3}, \qquad (2)$$

$$\dot{s}_1 = \omega_3 s_2 - \omega_2 s_3 \qquad (1,2,3),$$

а её первые интегралы образуют инволютивную систему

$$(\boldsymbol{\omega}^T\cdot\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}) - 2U_n(\mathbf{s},\rho) = h_1,$$
$$(\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}+\mathbf{k})\cdot\mathbf{s} = h_2, \quad \|\mathbf{s}\|^2 = 1, \qquad (3)$$

где h_1, h_2 − постоянные интегрирования.

В соотношениях (2), (3) функция U_n − полином степени n по параметру ρ. При $n = 0$ эти соотношения соответствуют выражениям классической задачи для гиростата, движущегося в однородном стационарном поле силы тяжести [12, с. 186].

Для дальнейшего система уравнений (2) рассматривается как *основная динамическая система* (ОДС).

3. Переход к ограниченной задаче однозначности решения основной динамической системы

Анализ существования однозначности общего интеграла ОДС (2) при заданных ограничениях в основном сводится к следующему.

Зададим условия

$$A_1 = A_2 = A, \quad r_1 = r_2 = 0, \quad k_1 = k_2 = 0, \quad k_3 = k, \qquad (4)$$

$$A_{311} = A_{322}, \quad A_{333} - 3A_{311} = D \neq 0,$$
$$A_{lrr} = 0 \quad (l = 1,2;\ r = 1,2,3), \quad A_{123} = 0. \qquad (5)$$

Условия группы (4) выражают структурно-динамическую симметрию гиростата относительно оси Ox_3, при которой гиростатический момент $\boldsymbol{k}$ направлен по этой оси. Эти условия соответствуют *гиростатическому аналогу Лагранжа–Харламова* (по систематизации работы [13]). Ограничения группы (5) отражают специальный вид кинетической симметрии [7].

Ставится задача: установить однозначность (или неоднозначность) решения ОДС (2) для случая потенциала, соответствующего значению приближения $n = 2$. □

В силу условий (4), (5) имеем $a_1 = a_2 = 0$ и для значения $n = 2$ потенциал U, определяемый равенством (1), принимает вид

$$U_2(s_3, \rho) = -Pr_3 s_3 + (A - A_3) m s_3^2 \rho + \\ + mD\left(1 - \frac{5}{3} s_3^2\right) s_3 \rho^2. \tag{6}$$

Обозначим

$$\Omega = \omega_1 + i\omega_2, \quad s = s_1 + is_2, \quad \Phi(s_3) = aU_2'(s_3), \\ a = A^{-1}, \quad n = a(G_3^0 - A\omega_3^0), \quad G_3^0 = A_3\omega_3^0 + k. \tag{7}$$

В равенствах (7) G_3^0 − начальное значение проекции на ось кинетической симметрии вектора кинетического момента гиростата; штрих обозначает дифференцирование по переменной s_3; i − мнимая единица; верхний нулевой индекс относится к значениям величин при $t = 0$.

Система динамических уравнений (2) для потенциала (6) в обозначениях (7) принимает вид

$$\dot{\Omega} - in\Omega = is\Phi(s_3), \qquad \dot{\omega}_3 = 0 \tag{8}$$

и в совокупности с кинематическими уравнениями Пуассона (2) обладает первыми алгебраическими интегралами

$$|\Omega|^2 - 2aU_2(s_3) = h, \qquad \omega_3 = \omega_3^0, \\ \mathrm{Re}(\Omega\bar{s}) + aG_3^0 s_3 = H. \tag{9}$$

В равенствах (9) $\mathrm{Re}(\Omega\bar{s}) = \mathrm{Re}(\overline{\Omega} s)$; черта сверху обозначает комплексно сопряжённую величину; h, H − постоянные интегрирования, связанные с постоянными из соотношений (3) равенствами

$$h = a[h_1 - A_3(\omega_3^0)^2], \qquad H = ah_2.$$

К соотношениям (9) следует присоединить тривиальный первый интеграл (3).

Применяя известный стандартный приём [14], в силу соотношений (9) и кинематических уравнений Эйлера в результате получаем определяющее для величины $s_3 = u$ уравнение

$$\dot{u}^2 = [2aU_2(u) + h](1 - u^2) - (H - aG_3^0 u)^2. \qquad (10)$$

Уравнение (10), представленное в виде

$$\dot{u}^2 = Q(u), \qquad (11)$$

по структуре идентично (с точностью до аддитивной постоянной k) соответствующему уравнению для твёрдого тела [10], однако при $k \neq 0$ является аналитически более общим, поскольку в этом случае $G_3^0 \neq A_3 \omega_3^0$.

Интегрируя уравнение (11), получаем

$$t - t_0 = \int \frac{du}{\sqrt{Q(u)}}, \qquad (12)$$

где $t = t_0$ − начальный момент времени.

Для дальнейшего предполагается, что в квадратурном равенстве (12) полином Q не имеет кратных корней, $A_{333} \neq 3A_{311}$, причём $-1 \leq u \leq 1$ и необходимо, чтобы $G_3^0 \neq h_2$, $h \neq H^2$.

4. Верификация однозначности результирующего интеграла

Обращая соотношение (12), можно получить общее решение объединённой системы, включающей уравнения (8) и систему уравнений Пуассона (2) − зависимость вида $u = u(t, t_0)$. При этом характерно, что гиростатическая функция $Q(u)$, находящаяся под радикалом в равенстве (12), при $D \neq 0$ является полиномом пятой степени. В силу этого интеграл, содержащийся в равенстве (12), относится к частному виду интегралов Абеля (гиперэллиптических интегралов жанра $p = 2$ [15]) и является *ультраэллиптическим интегралом* первого класса и первого рода [8, с. 231]. Известно, что обращение интегралов такого вида не приводит к однозначным функциям [8, 16].

Таким образом, факт существования независимого дополнительного алгебраического интеграла системы уравнений движения гиростата (2), (4)−(6), *не обусловливает однозначность* её общего интеграла. Аналогичный результат имеет место и для системы уравнений движения твёрдого тела [7].

Это утверждение имеет принципиальное значение в вопросе о взаимосвязи между независимыми первыми алгебраическими интегралами данной системы и её однозначными общими решениями.

Заключение

Идея С.В. Ковалевской об установлении случаев движения тяжёлого твёрдого тела с интегралами, не зависящими от времени и однозначными на всей комплексной плоскости переменного t, инициировала возникновение проблемы однозначности решения. Постановка этой проблемы динамики твёрдого тела вызвала появление ряда работ, публиковавшихся вплоть до 1960−1970-х гг. XX в. В настоящей статье предпринята попытка простейшего обобщения задачи о верификации однозначности её решения на случай гиростата.

Следует отметить, что идентичность вида гиростатической функции Q в соотношении (11) соответствующей функции в уравнении для случая твёрдого тела обусловлена структурным изоморфизмом физических моделей гиростата и твёрдого тела в силу идентичности группы условий (4).

Рассматривая аналогично предыдущему случаи движения гиростата в ньютоновском гравитационном поле, для которых приближения потенциальной функции имеют вид $U_n = U_n(s_3)$ ($n \geq 3$), можно далее показать, что установленное здесь свойство неоднозначности решения имеет место и для всех потенциальных функций данного вида со значениями $n > 2$.

Библиографический список

1. *Уиттекер Е.Т.* Аналитическая динамика. М.; Л.: ОНТИ, 1937. 500 с.

2. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 432 с.

3. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Об однозначных решениях и алгебраических интегралах задачи о вращении тяжёлого твёрдого

тела около неподвижной точки // Движение твёрдого тела вокруг неподвижной точки (сборник статей). Изд-во АН СССР, 1940. 189 с.

4. *Архангельский Ю.А.* Об одной теореме Пуанкаре, относящейся к задаче о движении твёрдого тела в ньютоновском поле сил // Прикладная математика и механика. 1962. Т. 26. Вып. 6. С. 1116−1117.

5. *Архангельский Ю.А.* Об алгебраических интегралах в задаче о движении твёрдого тела в ньютоновском поле сил // Прикладная математика и механика. 1963. Т. 27. Вып. 1. С. 171−175.

6. *Архангельский Ю.А.* Об однозначных интегралах в задаче о движении твёрдого тела в ньютоновском поле сил // Прикладная математика и механика. 1962. Т. 26. Вып. 3. С. 568−570.

7. *Архангельский Ю.А.* Об алгебраических и однозначных интегралах в задаче о движении твёрдого тела в ньютоновском поле сил // Прикладная математика и механика. 1963. Т. 27. Вып. 4. С. 697−698.

8. *Голубев В.В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжёлого твёрдого тела около неподвижной точки. М.: Гостехиздат, 1953. 287 с.

9. *Жуковский Н.Е.* Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1952. 812 с.

10. *Белецкий В.В.* Об интегрируемости уравнений движения твёрдого тела около закреплённой точки под действием центрального ньютоновского поля сил // Доклады Академии наук СССР. 1957. Т. 113, № 2. С. 287−290.

11. *Макеев Н.Н.* Верификация обобщённой модели динамики твёрдого тела // Вестник Пермского университета. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2011. Вып. 3(7). С. 35−41.

12. *Магнус К.* Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974. 528 с.

13. *Макеев Н.Н.* Резонансы и интегрируемость гиростатических систем // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы / Перм. ун-т. Пермь, 2007. Вып. 39. С. 85−109.

14. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.

15. *Тихомандрицкий М.А.* Основания теории абелевых интегралов. Харьков: Типография А. Дарре. 1895.

16. *Тихомандрицкий М.А.* Обращение гиперэллиптических интегралов. Харьков: Университетская типография. 1885.