

УДК 519.2

И.Е. Полосков

*Пермский государственный  
национальный исследовательский университет*

Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15  
polosk@psu.ru; (342) 2-396-560

**РАСЧЕТ СТАРШИХ МОМЕНТОВ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЙ  
ЛИНЕЙНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ  
СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ, ВОЗБУЖДАЕМОЙ  
АДДИТИВНЫМИ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ БЕЛЫМИ  
ШУМАМИ**

*Описывается теоретический аппарат и алгоритмическая часть применения комбинации метода шагов и расширения пространства состояний (МШРПС) для временного анализа систем линейных параметрических стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием. Важность решения указанной проблемы состоит в том, что: 1) из-за структуры рассматриваемых систем нельзя ограничиться первыми моментными функциями, как в случае линейных систем с гауссовскими белыми шумами на входе; 2) эти системы, важные для моделирования различных объектов и процессов, могут быть результатом линеаризации нелинейных стохастических систем с запаздыванием и мультипликативными флуктуациями. Ниже представлены некоторые детали этой модификации, включая структуру уравнений для моментных функций и алгоритм пересчета начальных условий в рамках пошаговой процедуры. Применение схемы демонстрируется на примере системы с одной степенью свободы.*

**Ключевые слова:** моделирование, функциональное дифференциальное уравнение, уравнение с запаздыванием, метод шагов, стохастический анализ, моментные функции.

## Введение

Современные теоретические исследования, направленные на изучение эффектов запаздываний на состояние и поведение различных систем, начались в середине двадцатого века [5, 6]. Но особенно интенсивный рост таких разработок обозначился сравнительно недавно, что связано с потребностями практики. Среди первых применений таких исследований были методы решения задач управления, а затем проблемы биологии, механики, физики, химии, медицины, экономики, атомной энергии, теории информации и т.д.

Математические модели для описания различных явлений в этих областях строятся в форме функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) (см. [1, 17] и др.) и различных специальных форм ФДУ, таких как обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) и дифференциальные уравнения в частных производных (ДУвЧП) с последствием [16, 23, 41], включая ОДУ с запаздыванием (ОДУсЗ), нейтральные обыкновенные дифференциальные уравнения (НОДУ), а также интегро-дифференциальные уравнения (ИДУ) [12, 15, 24, 37].

В настоящее время значительный интерес вызывают стохастические ФДУ (СФДУ) разных типов [8, 11, 27, 31, 32]. Также, как это было раньше для детерминированных систем, развитие методов исследований для стохастических уравнений стало важным для теории и практики. Анализ СФДУ вызывает значительные трудности, поскольку эти СФДУ, которые возникают во многих приложениях, не могут быть решены точно. Поэтому актуальной задачей является разработка эффективных прямых (для получения реализаций сильных решений) и косвенных (для вычисления статистических характеристик) приближенных аналитических и численных алгоритмов для анализа систем СФДУ. С общими идеями, алгоритмами и результатами стохастической динамики можно ознакомиться, например, в [2, 9, 20, 25, 35, 38, 39].

В данный момент существует довольно широкий класс методов решения детерминированных ФДУ [13, 36]. Приближенные алгоритмы прямого численного интегрирования СФДУ разных типов

(например, [14, 21, 22]) основаны на этих схемах и специальных комплексных методах численного решения стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) [3, 19, 28].

В настоящее время не существует формализма для точного расчета эффектов флуктуаций в нелинейных системах с запаздыванием. Стандартный подход на основе уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова не применим вследствие того, что он предназначен для марковских систем. Дифференциальные же системы с запаздыванием являются немарковскими, хотя различные приближения к ним могут быть марковскими [26].

Но есть некоторые формы СОДУ, которые не требуют рассмотрения очень сложных схем. Одну из таких форм формируют системы линейных СОДУ, возбуждаемых аддитивными и мультипликативными белыми шумами. В этом случае детерминированные ОДУ для первых и старших (центральных) моментных функций могут быть точно получены в замкнутой форме, т.е. ОДУ для моментных функций некоего порядка не содержат моментных функций более высоких порядков.

Если теперь перейти к линейным СОДУ с запаздыванием (СОДУсЗ) с теми же входными флуктуациями, то мы будем формально находиться в аналогичной ситуации относительно замыкания уравнений для моментов, как указано выше. Разница заключается в том, что эти уравнения будут СОДУсЗ. Чтобы получить ОДУ для старших функций момента без запаздывания, применим модификацию нашей схемы [?, 7, 33], объединяющую классический метод шагов и расширение пространства состояний системы (МШРПС).

Необходимость решения анонсированной проблемы включает как минимум две причины. Во-первых, из-за структуры рассматриваемых систем мы не можем ограничиться первыми моментными функциями, т.е. функциями математических ожиданий и ковариаций, как в случае линейных систем с гауссовскими белыми шумами на входе. Во-вторых, эти системы, важные для моделирования различных объектов и процессов, могут быть результатом линеаризации нелинейных стохастических систем с запаздыванием и мультипликативными флуктуациями.

Ниже мы представляем некоторые детали этой модификации, включая структуру ОДУ для моментных функций и алгоритм пересчета начальных условий в рамках пошаговой процедуры. В за-

ключение демонстрируется применение нашей схемы для изучения систем первого и второго порядков. Реализация алгоритма осуществлена в формате программы на входном языке пакета компьютерной алгебры (ПКА) *Mathematica* [29].

### 1. Основные используемые обозначения

Ниже используются следующие обозначения:

(1) строчные и подчеркнутые строчные буквы, набранные стандартным математическим шрифтом, для вещественных детерминированных величин (например,  $z$ ,  $\underline{z}$ );

(2) заглавные и подчеркнутые заглавные буквы, записанные стандартным математическим шрифтом, для вещественных случайных величин и процессов (например,  $Z$ ,  $Z(t)$ ,  $\underline{Z}$ ,  $\underline{Z}(t)$ );

(3) строчные и подчеркнутые строчные буквы, набранные полужирным наклонным математическим шрифтом, для вещественных детерминированных векторов (например,  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$ ,  $\underline{\mathbf{z}} = (\underline{z}_1, \dots, \underline{z}_n)$ );

(4) заглавные и подчеркнутые заглавные буквы, набранные полужирным наклонным математическим шрифтом, для вещественных векторных случайных величин и процессов (например,  $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)$ ,  $\mathbf{Z}(t) = (Z_1(t), \dots, Z_n(t))$ ,  $\underline{\mathbf{Z}} = (\underline{Z}_1, \dots, \underline{Z}_n)$ ,  $\underline{\mathbf{Z}}(t) = (\underline{Z}_1(t), \dots, \underline{Z}_n(t))$ );

(5) заглавные буквы, набранные двойным прямым математическим шрифтом, для множеств или пространств (например,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{N}$ );

(6) заглавные и подчеркнутые заглавные буквы, набранные полужирным каллиграфическим шрифтом, для вещественных детерминированных матриц (например,  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A} = \{a_{ij}\}$ ,  $\underline{\mathcal{A}}$ ,  $\underline{\mathcal{A}} = \{\underline{a}_{ij}\}$ ).

Кроме того, применяется следующая символика:

–  $\mathbb{M}_{\ell_1 \times \ell_2}$  and  $\mathbb{M}_{\ell_1 \times \ell_2 \times \ell_3}$  для линейных пространств всех  $(\ell_1 \times \ell_2)$  и  $(\ell_1 \times \ell_2 \times \ell_3)$  матриц соответственно,

–  $\mathcal{I}_\ell$ ,  $\underline{\mathcal{I}}_\ell$  для единичной матрицы в  $\mathbb{M}_{\ell \times \ell}$ ,

–  $\top$  как символ транспонирования матриц,

–  $\mathcal{O}_\ell \in \mathbb{R}^\ell$ ,  $\mathcal{O}_{\ell_1 \times \ell_2} \in \mathbb{M}_{\ell_1 \times \ell_2}$  и  $[\mathcal{O}]_{\ell_1 \times \ell_2 \times \ell_3} \in \mathbb{M}_{\ell_1 \times \ell_2 \times \ell_3}$  для нулевого вектора, нулевой матрицы и трехмерной нулевой матрицы соответственно,

–  $\dagger$  для сцепления трехмерных матриц относительно последней размерности,

–  $\mathbb{E}[\ ]$  для оператора математического ожидания,

—  $\delta(x)$ ,  $\delta(\underline{x})$ ,  $\delta(\mathbf{x})$ ,  $\delta(\underline{\mathbf{x}})$  для обобщенной функции Дирака, локализованной в точках  $0$ ,  $\mathbf{O}_k$  из  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{R}^k$ ,

—  $::$  для трехмерного умножения матрицы на вектор:

$$\llbracket \mathcal{P}(t) \rrbracket :: \mathbf{U}(t) = \left\{ \sum_{\ell=1}^r p_{ij\ell}(t) U_\ell(t), \quad i = \overline{1, r}, \quad j = \overline{1, q} \right\},$$

$$\llbracket \mathcal{P}(t) \rrbracket = \{p_{ij\ell}(t)\} \in \mathbb{M}_{r \times q \times r}, \quad \mathbf{U}(t) \in \mathbb{R}^r,$$

— если символы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $e_i$  и  $e_{ij}$  представляют мультииндексы, то они и их свойствами определяются так:

$$\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}, \quad \beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r\},$$

$$k_1 \alpha + k_2 \beta = \{k_1 \alpha_1 + k_2 \beta_1, k_1 \alpha_2 + k_2 \beta_2, \dots, k_1 \alpha_n + k_2 \beta_n\},$$

$$e_i = \{\delta_{ij}\}, \quad j = 1, 2, \dots, r, \quad e_{ij} = e_i + e_j,$$

$$X^\alpha = X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_r^{\alpha_r}, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_r^{\alpha_r}, \quad M_\alpha = M_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}.$$

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим следующую систему линейных стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием в смысле Стратоновича:

$$d\mathbf{X}(t) = [\mathcal{A}_0(t) \mathbf{X}(t) + \mathbf{c}_0(t)] dt + [\llbracket \mathcal{B}_0(t) \rrbracket :: \mathbf{X}(t) + \mathcal{G}_0(t)] \circ d\mathbf{W}(t),$$

$$t_0 < t \leq t_0 + \tau, \quad (1)$$

$$\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}^0, \quad (2)$$

$$d\mathbf{X}(t) = [\mathcal{A}(t) \mathbf{X}(t) + \mathcal{Q}(t) \mathbf{X}(t - \tau) + \mathbf{c}(t)] dt + [\llbracket \mathcal{B}(t) \rrbracket :: \mathbf{X}(t) + \llbracket \mathcal{H}(t) \rrbracket :: \mathbf{X}(t - \tau) + \mathcal{G}(t)] \circ d\mathbf{W}(t), \quad t_0 + \tau < t \leq T, \quad (3)$$

где  $t$  – время,  $t_0$  и  $T$  – начальное и конечное время,  $t_0 < T < +\infty$ , а  $\tau > 0$  – постоянное запаздывание. Вектор  $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)) \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния системы. Начальное условие  $\mathbf{X}^0 = (X_1^0, X_2^0, \dots, X_n^0)$  – гильбертов случайный вектор, распределенный согласно плотности вероятности  $p^0(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Его вектором математических ожиданий, ковариационной матрицей и моментами являются  $\mathbf{m}_X^0 = \mathbb{E}[\mathbf{X}^0]$ ,  $\mathcal{D}_{XX}^0 = \mathbb{E}[(\mathbf{X}^0 - \mathbf{m}_X^0)(\mathbf{X}^0 - \mathbf{m}_X^0)^\top]$  и

$M_{X\alpha}^0 = \mathbb{E}[(X^0)^\alpha]$  соответственно. Вход  $\{\mathbf{W}(t) = (W_1(t), W_2(t), \dots, W_m(t)), t \geq t_0\} \in \mathbb{R}^m$  – векторный винеровский случайный процесс, который состоит из независимых компонент и не зависит от  $\mathbf{X}^0$ . Обобщенная производная от  $\mathbf{W}(t)$  по  $t$ , обозначаемая  $\{\dot{\mathbf{W}}(t) = (\dot{W}_1(t), \dot{W}_2(t), \dots, \dot{W}_m(t)), t \geq t_0\}$ , – векторный гауссовский белый шум с независимыми компонентами, такой, что

$$\mathbb{E}[\dot{\mathbf{W}}(t)] = 0, \quad \mathbb{E}[\dot{\mathbf{W}}(t) \dot{\mathbf{W}}^\top(t')] = \mathcal{I}_m \delta_0(t - t'). \quad (4)$$

В уравнениях (1), (3),  $\mathcal{A}_0(t) = \{a_{0ij}(t)\}$ ,  $\mathcal{A}(t) = \{a_{ij}(t)\}$ ,  $\mathcal{Q}(t) = \{q_{ij}(t)\}$ ,  $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}, \mathcal{Q} \in \mathbb{M}_{n \times n}$ ,  $\llbracket \mathcal{B}_0(t) \rrbracket = \{b_{0ijk}(t)\}$ ,  $\llbracket \mathcal{B}(t) \rrbracket = \{b_{ijk}(t)\}$ ,  $\llbracket \mathcal{H}(t) \rrbracket = \{h_{ijk}(t)\}$ ,  $\llbracket \mathcal{B}_0 \rrbracket, \llbracket \mathcal{B} \rrbracket, \llbracket \mathcal{H} \rrbracket \in \mathbb{M}_{n \times m \times n}$ ,  $\mathcal{G}_0(t) = \{g_{ij}(t)\}$ ,  $\mathcal{G}(t) = \{g_{ij}(t)\}$ ,  $\mathcal{G}_0, \mathcal{G} \in \mathbb{M}_{n \times m}$  – заданные детерминированные вещественные матрицы,  $\mathbf{c}_0(t) = \{c_{0i}(t)\}$  и  $\mathbf{c}(t) = \{c_i(t)\}$  – заданные детерминированные вещественные векторы в  $\mathbb{R}^n$ . Предположим, что элементы всех этих матриц и векторов являются непрерывными функциями аргумента  $t$ .

Заметим, что определение вектора состояния на начальном множестве  $[t_0, t_0 + \tau]$  в виде  $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}^0$  или  $\mathbf{X}(t) = \phi(t)$ , где  $\phi(t)$  – заданная детерминированная вектор-функция, легко сводится к рассмотренной выше постановке задачи.

Условия существования и единственности для сильных и слабых решений нелинейных стохастических систем с запаздыванием рассматриваются в работах [11, 27, 31]. Вследствие того, что уравнения (1), (3) линейны, вектор  $\mathbf{X}^0$  является случайным вектором второго порядка, то согласно [27],  $\{\mathbf{X}(t), t \in [t_0, T]\}$ , т.е. решение уравнений (1), (3), существует. Различные условия непрерывности, устойчивости, ограниченности моментных функций и наличия других свойств решения представлены во многих работах и, в частности, в [18, 27, 30, 31, 40].

Если на уравнения (1), (3) посмотреть с точки зрения теории случайных процессов, можно заключить, что из-за наличия запаздывания в общем случае случайный векторный процесс  $\mathbf{X}(t)$ , решение этих уравнений, не является марковским векторным случайным процессом [10]. Поэтому хорошо известный аналитический аппарат теории марковских процессов, основанный на использовании уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК-уравнений) для плотностей вероятности  $p(\mathbf{x}, t)$ , а также плотностей вероятности перехода  $\pi(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, s)$  векторов состояний линейных или нели-

нейных динамических систем, не может быть применен для получения статистических характеристик  $\mathbf{X}(t)$ , таких как функции математического ожидания, функции ковариации и т.д.

С другой стороны, попытки построить другие математические модели явлений, описываемых уравнениями, построенными на основе уравнений типа (1), (3), а именно, модели, более удобные для дальнейшего анализа, вполне естественны.

Принимая во внимание предыдущие определения и обозначения, можно констатировать, что проблема, решаемая в этой статье, заключается в построении схемы вычисления ряда различных моментных функций  $M_{X^\alpha}(t) = \mathbb{E}[X^\alpha(t)]$  ( $\alpha$  – мультииндекс), вектор-функции  $\mathbf{m}_X(t) \equiv \{m_{X_i}(t)\} = \mathbb{E}[\mathbf{X}(t)]$ , а также матрично-значной функции

$$\mathcal{D}_{XX}(t) = \{D_{ij}(t)\} \equiv \mathbb{E}[\{\mathbf{X}(t) - \mathbf{m}_X(t)\} \{\mathbf{X}(t) - \mathbf{m}_X(t)\}^T]$$

для всех  $t$  из  $(t_0, T]$ .

### 3. Общая схема вычислений

Чтобы получить ОДУ для необходимых статистических характеристик вектора  $\mathbf{X}(t)$  при любом  $t > t_0$ , расширим пространство состояний исследуемой системы, преобразовав немарковскую систему в марковскую. Чтобы сделать такое преобразование, воспользуемся следующими обозначениями:

$$\begin{aligned} s &\in [0, \tau], \quad t_k = t_0 + k\tau, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N+1, \quad t_{N+1} \geq T, \\ s_k &= s + t_k, \quad \Delta_k = (t_k, t_{k+1}], \quad p_k(\mathbf{x}_k, s) = p(\mathbf{x}_k, s + t_k), \\ p_k(\mathbf{x}_k, 0) &= p_{k-1}(\mathbf{x}_k, \tau), \quad p_0(\mathbf{x}_0, 0) = p^0(\mathbf{x}_0), \\ \mathbf{X}_k(s) &= \mathbf{X}(s + t_k), \quad \mathbf{X}_k(0) = \mathbf{X}_{k-1}(\tau) \text{ а.с.}, \quad \mathbf{Y}(s) \equiv \mathbf{X}^0, \\ \mathbf{W}_k(s) &= \mathbf{W}(s + t_k), \quad \mathbf{W}_k(0) = \mathbf{W}_{k-1}(\tau) \text{ а.с.}, \\ \mathbf{Z}_0(s) &= \text{col}(\mathbf{Y}(s), \mathbf{X}_0(s)), \\ \mathbf{Z}_1(s) &= \text{col}(\mathbf{Y}(s), \mathbf{X}_0(s), \mathbf{X}_1(s)) \equiv \text{col}(\mathbf{Z}_0(s), \mathbf{X}_1(s)), \\ \mathbf{Z}_2(s) &= \text{col}(\mathbf{Z}_1(s), \mathbf{X}_2(s)), \quad \dots \quad \mathbf{Z}_N(s) = \text{col}(\mathbf{Z}_{N-1}(s), \mathbf{X}_N(s)). \end{aligned}$$

Тогда используя пошаговую процедуру, построим цепочку систем СОДУ и соответствующие ФПК-уравнения для плотностей вероятности векторов  $\mathbf{Z}_0(s), \mathbf{Z}_1(s), \mathbf{Z}_2(s), \dots, \mathbf{Z}_N(s)$ , принадлежащих

семейству вложенных пространств состояний  $\mathbb{R}^{2n} \subset \mathbb{R}^{3n} \subset \dots \subset \mathbb{R}^{n(N+2)}$ .

**0<sup>0</sup>.** Рассмотрим полуинтервал  $\Delta_0$ . Компоненты векторного случайного процесса  $\mathbf{Z}_0(s)$ , определенные на  $\Delta_0$ , удовлетворяют системе СДУ вида:

$$\begin{aligned} d\mathbf{Y}(s) &= \mathbf{O}_n ds, & \mathbf{Y}(0) &= \mathbf{X}^0, \\ d\mathbf{X}_0(s) &= [\mathbf{A}_0(s_0) \mathbf{X}_0(s) + \mathbf{c}_0(s_0)] ds + \\ &+ [[\mathbf{B}_0(s_0)] :: \mathbf{X}_0(s) + \mathbf{g}_0(s_0)] \circ d\mathbf{W}_0(s), & \mathbf{X}_0(0) &= \mathbf{X}^0. \end{aligned} \quad (5)$$

Если воспользоваться объединенной формой уравнений (5)

$$\begin{aligned} d\mathbf{Z}_0(s) &= [\mathbf{A}_0^+(s) \mathbf{Z}_0(s) + \mathbf{c}_0^+(s)] ds + [[\mathbf{B}_0^+(s)] :: \mathbf{Z}_0(s) + \\ &+ \mathbf{g}_0^+(s)] \circ d\mathbf{W}_0(s), & \mathbf{Z}_0(0) &= \text{col}(\mathbf{X}^0, \mathbf{X}^0), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0^+(s) &= \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times n} & \mathbf{O}_{n \times n} \\ \mathbf{O}_{n \times n} & \mathbf{A}_0(s_0) \end{bmatrix}, & \mathbf{c}_0^+(s) &= \begin{bmatrix} \mathbf{O}_n \\ \mathbf{c}_0(s_0) \end{bmatrix}, \\ \llbracket \mathbf{B}_0^+(s) \rrbracket &= \begin{bmatrix} \llbracket \mathbf{O} \rrbracket_{n \times m \times n} \\ \llbracket \mathbf{O} \rrbracket_{n \times m \times n} \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} \llbracket \mathbf{O} \rrbracket_{n \times m \times n} \\ \llbracket \mathbf{B}_0(s_0) \rrbracket \end{bmatrix}, & \mathbf{g}_0^+(s) &= \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times m} \\ \mathbf{g}_0(s_0) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (7)$$

и сравнить системы уравнений (6), (7) и (25), (26), то можно заключить, что эти системы будут одинаковы, если

$$\begin{aligned} r &= 2n, & q &= m, & s_* &= 0, & s^* &= \tau, & \underline{\mathbf{A}}(s) &= \mathbf{A}_0^+(s), \\ \underline{\mathbf{c}}(s) &= \mathbf{c}_0^+(s), & \llbracket \underline{\mathbf{B}}(s) \rrbracket &= \llbracket \mathbf{B}_0^+(s) \rrbracket, & \underline{\mathbf{g}}(s) &= \mathbf{g}_0^+(s). \end{aligned} \quad (8)$$

Поэтому мы можем записать уравнение для плотности вероятности  $p_{Z_0}(\mathbf{z}_0, s)$  расширенного векторного процесса состояния  $\mathbf{Z}_0(s)$ :

$$\frac{\partial p_{Z_0}}{\partial s} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2n} \frac{\partial^2 (\tilde{b}_{0ij} p_{Z_0})}{\partial z_{0i} \partial z_{0j}} - \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial (\tilde{a}_{0i} p_{Z_0})}{\partial z_{0i}}, \quad (9)$$

$$p_{Z_0}(\mathbf{z}_0, 0) \equiv p_{Z_0}(\mathbf{y}, \mathbf{x}_0, 0) = p^0(\mathbf{x}_0) \delta_0(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0),$$

где коэффициенты  $\tilde{a}_{0i}$  и  $\tilde{b}_{0ij}$  могут быть вычислены по формулам (29), (30) как  $\hat{a}_i$  and  $\hat{b}_{ij}$  соответственно.



Более того, этот факт дает нам возможность построить явный вид уравнений (31), (32) и (33) (см. Приложение). Конечной точкой этого этапа является определение начальных условий для  $\mathbf{m}_{Z_0}(s)$ ,  $\mathcal{D}_{Z_0 Z_0}(s)$  и  $M_{Z_0 \alpha}(s)$ . Первые две группы таких условий таковы:

$$\mathbf{m}_{Z_0}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_X^0 \\ \mathbf{m}_X^0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}_{Z_0 Z_0}(0) = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{XX}^0 & \mathcal{D}_{XX}^0 \\ \mathcal{D}_{XX}^0 & \mathcal{D}_{XX}^0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Далее надо вычислить  $\mathbf{m}_{Z_0}(s)$  как  $\mathbf{m}_Z(s)$  и  $\mathcal{D}_{Z_0 Z_0}(s)$  как  $\mathcal{D}_{ZZ}(s)$ .

Теперь добавим начальные условия для произвольных моментных функций  $M_{Z_0 \alpha}(s) = \mathbb{E}[Z_0^{\alpha_0}(s)]$  вектора  $\mathbf{Z}_0(s)$ , где

$$\alpha_0 = \langle \alpha_Y, \alpha_{X0} \rangle \equiv \{\alpha_{Y1}, \alpha_{Y2}, \dots, \alpha_{Yn}, \alpha_{X01}, \alpha_{X02}, \dots, \alpha_{X0n}\},$$

– мультииндекс. Тогда получим, что

$$\begin{aligned} M_{Z_0 \alpha_0}(0) &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} z_0^{\alpha_0} p_{Z_0}(z_0, 0) dz_0 \equiv \\ &\equiv \int_{\mathbb{R}^{2n}} y^{\alpha_Y} x_0^{\alpha_{X0}} p^0(\mathbf{x}_0) \delta_0(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) d\mathbf{y} d\mathbf{x}_0 = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} x_0^{\alpha_Y + \alpha_{X0}} p^0(\mathbf{x}_0) d\mathbf{x}_0 = M_{X_0, \alpha_Y + \alpha_{X0}}^0. \end{aligned} \quad (11)$$

**1<sup>0</sup>.** Теперь обратимся к сегментам  $\Delta_0$  и  $\Delta_1$ . Система СОДУ для вычисления вектора расширенного состояния  $\mathbf{Z}_1(s)$  может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} d\mathbf{Y}(s) &= \mathbf{O}_n ds, & \mathbf{Y}(0) &= \mathbf{X}^0, \\ d\mathbf{X}_0(s) &= [\mathcal{A}_0(s_0) \mathbf{X}_0(s) + \mathbf{c}_0(s_0)] ds + \\ &+ [[\mathcal{B}_0(s_0)] :: \mathbf{X}_0(s) + \mathcal{G}_0(s_0)] \circ d\mathbf{W}_0(s), & \mathbf{X}_0(0) &= \mathbf{X}^0, \\ d\mathbf{X}_1(s) &= [\mathcal{A}(s_1) \mathbf{X}_1(s) + \mathcal{Q}(s_1) \mathbf{X}_0(s) + \\ &+ \mathbf{c}(s_1)] ds + [[\mathcal{B}(s_1)] :: \mathbf{X}_1(s) + \\ &+ [\mathcal{H}(s_1)] :: \mathbf{X}_0(s) + \mathcal{G}(s_1)] \circ d\mathbf{W}_1(s), & \mathbf{X}_1(0) &= \mathbf{X}_0(\tau). \end{aligned} \quad (12)$$

Действуя так же, как на шаге **0<sup>0</sup>**, мы можем записать компактную форму уравнений (12):

$$d\mathbf{Z}_1(s) = [\mathbf{A}_1^+(s) \mathbf{Z}_1(s) + \mathbf{c}_1^+(s)] ds + [\llbracket \mathbf{B}_1^+(s) \rrbracket :: \mathbf{Z}_1(s) + \mathbf{g}_1^+(s)] \circ d\mathbf{W}_1^+(s), \quad \mathbf{Z}_1(0) = \text{col}(\mathbf{Z}_0(0), \mathbf{X}_0(\tau)), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1^+(s) &= \begin{bmatrix} \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{O}_{n \times n} \\ \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{A}_0(s_0) & \mathcal{O}_{n \times n} \\ \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{Q}(s_1) & \mathcal{A}(s_1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_1^+(s) = \begin{bmatrix} \mathcal{O}_n \\ \mathbf{c}_0(s_0) \\ \mathbf{c}(s_1) \end{bmatrix}, \\ \llbracket \mathbf{B}_1^+(s) \rrbracket &= \begin{bmatrix} \llbracket \mathcal{O} \rrbracket_{n \times m \times n} \\ \llbracket \mathcal{O} \rrbracket_{n \times m \times n} \\ \llbracket \mathcal{O} \rrbracket_{n \times m \times n} \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} \llbracket \mathcal{O} \rrbracket_{n \times m \times n} \\ \llbracket \mathbf{B}_0(s_0) \rrbracket \\ \llbracket \mathcal{H}(s_1) \rrbracket \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} \llbracket \mathcal{O} \rrbracket_{n \times m \times n} \\ \llbracket \mathcal{O} \rrbracket_{n \times m \times n} \\ \llbracket \mathbf{B}(s_1) \rrbracket \end{bmatrix}, \quad (14) \\ \mathbf{g}_1^+(s) &= \begin{bmatrix} \mathcal{O}_{n \times m} & \mathcal{O}_{n \times m} \\ \mathbf{g}_0(s_0) & \mathcal{O}_{n \times m} \\ \mathcal{O}_{n \times m} & \mathbf{g}(s_1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_1^+(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_0(s) \\ \mathbf{W}_1(s) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Как и выше, сравниваем структуры уравнений (13), (14) и (25), (26) и заключаем, что эти системы идентичны, если

$$\begin{aligned} r &= 3n, \quad q = 2m, \quad s_* = 0, \quad s^* = \tau, \quad \mathbf{A}(s) = \mathbf{A}_1^+(s), \\ \mathbf{c}(s) &= \mathbf{c}_1^+(s), \quad \llbracket \mathbf{B}(s) \rrbracket = \llbracket \mathbf{B}_1^+(s) \rrbracket, \quad \mathbf{g}(s) = \mathbf{g}_1^+(s). \end{aligned} \quad (15)$$

Это позволяет построить ФПК-уравнение для плотности вероятности  $p_{Z_1}(\mathbf{z}_1, s)$  расширенного вектора состояния  $\mathbf{Z}_1(s)$  в следующем виде:

$$\frac{\partial p_{Z_1}}{\partial s} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3n} \frac{\partial^2 (\tilde{b}_{1ij} p_{Z_1})}{\partial z_{1i} \partial z_{1j}} - \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial (\tilde{a}_{1i} p_{Z_1})}{\partial z_{1i}}, \quad (16)$$

$$p_{Z_1}(\mathbf{z}_1, 0) \equiv p_{Z_1}(\mathbf{y}, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, 0) = p_{Z_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \tau) \delta_0(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0).$$

Очевидно, что коэффициенты  $\tilde{a}_{1i}$  и  $\tilde{b}_{1ij}$  можно найти по формулам (29), (30) как  $\hat{a}_i$  и  $\hat{b}_{ij}$  соответственно.

Теперь мы можем построить явный вид уравнений (31), (32), (33). А заканчивается этот шаг фиксацией начальных условий для  $\mathbf{m}_{Z_1}(s)$  и  $\mathcal{D}_{Z_1 Z_1}(s)$  для  $\mathbf{Z}_1(s)$  следующим образом:

$$\mathbf{m}_{Z_1}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_X^0 \\ \mathbf{m}_X^0 \\ \mathbf{m}_{X_0}(\tau) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}_{Z_1 Z_1}(0) = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{XX}^0 & \mathcal{D}_{XX}^0 & \mathcal{D}_{YX_0}(\tau) \\ \mathcal{D}_{XX}^0 & \mathcal{D}_{XX}^0 & \mathcal{D}_{YX_0}(\tau) \\ \mathcal{D}_{X_0Y}(\tau) & \mathcal{D}_{X_0Y}(\tau) & \mathcal{D}_{X_0X_0}(\tau) \end{bmatrix} \quad (17)$$

и оценкой  $\mathbf{m}_{Z_1}(s)$  как  $\underline{\mathbf{m}}_Z(s)$  и  $\mathcal{D}_{Z_1 Z_1}(s)$  как  $\underline{\mathcal{D}}_{ZZ}(s)$ .

Подобная процедура устанавливает начальные условия для любых моментных функций  $M_{Z_1 \alpha}(s) = \mathbb{E}[Z_1^{\alpha_1}(s)]$ , где

$$\alpha_1 = \langle \alpha_Y, \alpha_{X_0}, \alpha_{X_1} \rangle \equiv \{ \alpha_{Y_1}, \dots, \alpha_{Y_n}, \alpha_{X_{01}}, \dots, \alpha_{X_{0n}}, \alpha_{X_{11}}, \dots, \alpha_{X_{1n}} \},$$

– мультииндекс. Отсюда можно получить соотношение

$$\begin{aligned} M_{Z_1 \alpha_1}(0) &= \int_{\mathbb{R}^{3n}} z_1^{\alpha_1} p_{Z_1}(z_1, 0) dz_1 \equiv \\ &\equiv \int_{\mathbb{R}^{3n}} y^{\alpha_Y} x_0^{\alpha_{X_0}} x_1^{\alpha_{X_1}} p_{Z_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \tau) \delta_0(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) d\mathbf{y} d\mathbf{x}_0 d\mathbf{x}_1 = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} x_0^{\alpha_Y + \alpha_{X_0}} x_1^{\alpha_{X_1}} p_{Z_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \tau) d\mathbf{x}_0 d\mathbf{x}_1 = M_{Z_0, \langle \alpha_Y + \alpha_{X_0}, \alpha_{X_1} \rangle}(\tau). \\ &\quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \end{aligned}$$

$\mathbf{N}^0$ . На последнем шаге рассматриваются промежутки времени  $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_N$  и строится система СОДУ для вектора состояния  $\mathbf{Z}_N(s)$  в виде:

$$\begin{aligned} d\mathbf{Y}(s) &= \mathbf{O}_n ds, & \mathbf{Y}(0) &= \mathbf{X}^0, \\ d\mathbf{X}_0(s) &= [\mathcal{A}_0(s_0) \mathbf{X}_0(s) + \mathbf{c}_0(s_0)] ds + \\ &+ [ [\mathcal{B}_0(s_0)] :: \mathbf{X}_0(s) + \mathcal{G}_0(s_0) ] \circ d\mathbf{W}_0(s), & \mathbf{X}_0(0) &= \mathbf{X}^0, \\ d\mathbf{X}_1(s) &= [\mathcal{A}(s_1) \mathbf{X}_1(s) + \mathcal{Q}(s_1) \mathbf{X}_0(s) + \\ &+ \mathbf{c}(s_1)] ds + [ [\mathcal{B}(s_1)] :: \mathbf{X}_1(s) + \\ &+ [\mathcal{H}(s_1)] :: \mathbf{X}_0(s) + \mathcal{G}(s_1) ] \circ d\mathbf{W}_1(s), & \mathbf{X}_1(0) &= \mathbf{X}_0(\tau). \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ d\mathbf{X}_N(s) &= [\mathcal{A}(s_N) \mathbf{X}_N(s) + \mathcal{Q}(s_N) \mathbf{X}_{N-1}(s) + \\ &+ \mathbf{c}(s_N)] ds + [ [\mathcal{B}(s_N)] :: \mathbf{X}_N(s) + \\ &+ [\mathcal{H}(s_N)] :: \mathbf{X}_{N-1}(s) + \mathcal{G}(s_N) ] \circ d\mathbf{W}_N(s), & \mathbf{X}_N(0) &= \mathbf{X}_{N-1}(\tau). \end{aligned} \tag{18}$$

Последующие действия аналогичны действиям, выполненным в процессе выполнения шагов  $\mathbf{0}^0, \mathbf{1}^0, \dots, (\mathbf{N} - \mathbf{1})^0$ , и включают следующие этапы:

(1) записать сжатую форму уравнений (18):

$$d\mathbf{Z}_N(s) = [\mathbf{A}_N^+(s) \mathbf{Z}_N(s) + \mathbf{c}_N^+(s)] ds + [[\mathbf{B}_N^+(s)] :: \mathbf{Z}_N(s) + \mathbf{g}_N^+(s)] \circ d\mathbf{W}_N^+(s), \quad \mathbf{Z}_N(0) = \text{col}(\mathbf{Z}_{N-1}(0), \mathbf{X}_{N-1}(\tau)) \quad (19)$$

где используемые матрицы и векторы вычисляются следующим образом:

$$\mathbf{A}_N^+(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{N-1}^+(s) & \mathcal{O}_{(N+1)n \times n} \\ \mathcal{O}_{n \times Nn} & \mathcal{Q}(s_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_N^+(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{N-1}^+(s) \\ \mathbf{c}(s_N) \end{bmatrix},$$

$$[[\mathbf{B}_N^+(s)]] = \begin{bmatrix} [[\mathcal{O}]]_{n \times m \times n} \\ [[\mathcal{O}]]_{n \times m \times n} \\ [[\mathcal{O}]]_{n \times m \times n} \\ [[\mathcal{O}]]_{n \times m \times n} \\ \dots \\ [[\mathcal{O}]]_{n \times m \times n} \\ [[\mathcal{O}]]_{n \times m \times n} \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} [[\mathcal{O}]]_{n \times m \times n} \\ [[\mathbf{B}_0(s_0)]] \\ [[\mathcal{H}(s_1)]] \\ [[\mathcal{O}]]_{n \times m \times n} \\ \dots \\ [[\mathcal{O}]]_{n \times m \times n} \\ [[\mathcal{O}]]_{n \times m \times n} \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} [[\mathcal{O}]]_{n \times m \times n} \\ [[\mathcal{O}]]_{n \times m \times n} \\ [[\mathbf{B}(s_1)]] \\ [[\mathcal{H}(s_2)]] \\ \dots \\ [[\mathcal{O}]]_{n \times m \times n} \\ [[\mathcal{O}]]_{n \times m \times n} \end{bmatrix} \ddagger$$

$$\ddagger \dots \ddagger \begin{bmatrix} [[\mathcal{O}]]_{n \times m \times n} \\ [[\mathcal{O}]]_{n \times m \times n} \\ [[\mathcal{O}]]_{n \times m \times n} \\ [[\mathcal{O}]]_{n \times m \times n} \\ \dots \\ [[\mathbf{B}(s_{N-1})]] \\ [[\mathcal{H}(s_N)]] \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} [[\mathcal{O}]]_{n \times m \times n} \\ [[\mathcal{O}]]_{n \times m \times n} \\ [[\mathcal{O}]]_{n \times m \times n} \\ [[\mathcal{O}]]_{n \times m \times n} \\ \dots \\ [[\mathcal{O}]]_{n \times m \times n} \\ [[\mathbf{B}(s_N)]] \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$\mathbf{g}_N^+(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{N-1}^+(s) & \mathcal{O}_{(N+1)n \times m} \\ \mathcal{O}_{n \times Nm} & \mathbf{g}(s_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_N^+(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{N-1}^+(s) \\ \mathbf{W}_N(s) \end{bmatrix};$$

(2) сравнить структуры систем СОДУ (19), (20) и (25), (26) и установить, что эти системы одинаковы, если

$$r = (N + 2)n, \quad q = (N + 1)m, \quad s_* = 0, \quad s^* = \tau, \quad \mathbf{A}(s) = \mathbf{A}_N^+(s), \\ \underline{\mathbf{c}}(s) = \mathbf{c}_N^+(s), \quad [[\underline{\mathbf{B}}(s)]] = [[\mathbf{B}_N^+(s)]], \quad \underline{\mathbf{g}}(s) = \mathbf{g}_N^+(s);$$

(3) построить ФПК-уравнение для плотности распределения вероятностей  $p_{Z_N}(\mathbf{z}_N, s)$  векторного процесса состояния  $\mathbf{Z}_N(s)$  следу-

ющим образом:

$$\frac{\partial p_{Z_N}}{\partial s} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{(N+2)n} \frac{\partial^2 (\tilde{b}_{Nij} p_{Z_N})}{\partial z_{Ni} \partial z_{Nj}} - \sum_{i=1}^{(N+2)n} \frac{\partial (\tilde{a}_{Ni} p_{Z_N})}{\partial z_{Ni}}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} p_{Z_N}(z_N, 0) &\equiv p_{Z_N}(\mathbf{y}, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{x}_N, 0) = \\ &= p_{Z_{N-1}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{x}_N, \tau) \delta_0(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0); \end{aligned}$$

(4) вычислить коэффициенты  $\tilde{a}_{Ni}$  и  $\tilde{b}_{Nij}$  из формул (29), (30) как  $\hat{a}_i$  и  $\hat{b}_{ij}$  соответственно;

(5) построить явный вид уравнений (31), (32), (33);

(6) установить начальные условия для  $\mathbf{m}_{Z_N}(s)$  и  $\mathcal{D}_{Z_N Z_N}(s)$  из  $\mathbf{Z}_N(s)$  в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{Z_N}(0) &= \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{Z_{N-1}}(0) \\ \mathbf{m}_{X_{N-1}}(\tau) \end{bmatrix}, \\ \mathcal{D}_{Z_N Z_N}(0) &= \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{XX}^0 & \mathcal{D}_{XX}^0 & \mathcal{D}_{YX_0}(\tau) & \dots & \mathcal{D}_{YX_{N-1}}(\tau) \\ \mathcal{D}_{XX}^0 & \mathcal{D}_{XX}^0 & \mathcal{D}_{YX_0}(\tau) & \dots & \mathcal{D}_{YX_{N-1}}(\tau) \\ \mathcal{D}_{X_0Y}(\tau) & \mathcal{D}_{X_0Y}(\tau) & \mathcal{D}_{X_0X_0}(\tau) & \dots & \mathcal{D}_{X_0X_{N-1}}(\tau) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{D}_{X_{N-1}Y}(\tau) & \mathcal{D}_{X_{N-1}Y}(\tau) & \mathcal{D}_{X_{N-1}X_0}(\tau) & \dots & \mathcal{D}_{X_{N-1}X_{N-1}}(\tau) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (22)$$

и вычислить  $\mathbf{m}_{Z_N}(s)$  как  $\underline{\mathbf{m}}_Z(s)$  и  $\mathcal{D}_{Z_N Z_N}(s)$  как  $\underline{\mathcal{D}}_{ZZ}(s)$ .

Тогда начальные условия для произвольных моментных функций  $M_{Z_N \alpha}(s) = \mathbb{E}[Z_N^{\alpha N}(s)]$ , где

$$\alpha_N = \langle \alpha_Y, \alpha_{X_0}, \alpha_{X_1}, \dots, \alpha_{X_N} \rangle$$

– мультииндекс, будут иметь следующую форму:

$$\begin{aligned} M_{Z_N \alpha_N}(0) &= \int_{\mathbb{R}^{n(N+1)}} z_N^{\alpha_N} p_{Z_N}(z_N, 0) dz_N \equiv \\ &\equiv \int_{\mathbb{R}^{n(N+1)}} y^{\alpha_Y} x_0^{\alpha_{X_0}} x_1^{\alpha_{X_1}} \dots x_N^{\alpha_{X_N}} \times \\ &\times p_{Z_{N-1}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N-1}, \tau) \delta_0(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) dy dx_0 dx_1 \dots dx_{N-1} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\mathbb{R}^{n(N+1)}} x_0^{\alpha_Y + \alpha_{X_0}} x_1^{\alpha_{X_1}} \dots x_N^{\alpha_{X_N}} \times \\
 &\times p_{Z_{N-1}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N-1}, \tau) d\mathbf{x}_0 d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_{N-1} = \\
 &= M_{Z_{N-1}, \langle \alpha_Y + \alpha_{X_0}, \alpha_{X_1}, \dots, \alpha_{X_N} \rangle}(\tau).
 \end{aligned}$$

#### 4. Пример

Рассмотрим следующую колебательную стохастическую систему, записанную в нестрогой форме:

$$\ddot{X}(t) = 0, \quad -\tau < t \leq 0, \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
 &\ddot{X}(t) + 2\alpha_1 [1 + \beta_1 V_1(t)] \dot{X}(t) + 2\alpha_2 [1 + \beta_2 V_2(t)] \dot{X}(t - \tau) \\
 &+ \omega_0^2 X(t) + \alpha_3 [1 + \beta_3 V_3(t)] X(t - \tau) = \gamma V_4(t), \quad 0 < t \leq N\tau, \quad (24)
 \end{aligned}$$

где  $\alpha_1 > 0$ ,  $\beta_1, \alpha_2, \beta_2, \omega_0 > 0$ ,  $\alpha_3, \beta_3, \gamma$  – постоянные,  $N \in \mathbb{N}$ ,  $N < +\infty$ . Обозначая  $X(t)$  через  $X_1(t)$  и  $\dot{X}(t)$  через  $X_2(t)$ , можно записать уравнения (23), (24) в виде (1), (3). В этом случае

$$n = 2, \quad m = 4, \quad t_0 = -\tau, \quad T = N\tau, \quad \mathbf{g}_0 = \mathbf{O}_{2 \times 4},$$

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_0 = \mathbf{O}_2, \quad \llbracket \mathbf{B}_0 \rrbracket = \llbracket \mathbf{O} \rrbracket_{2 \times 4 \times 2},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\alpha_3 & -2\alpha_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{O}_2,$$

$$\llbracket \mathbf{B} \rrbracket = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\alpha_1 \beta_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix},$$

$$\llbracket \mathcal{H} \rrbracket = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_3 \beta_3 & 0 \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\alpha_2 \beta_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Расчеты статистических характеристик вектора  $\mathbf{X}(t)$  выполнялись при следующих значениях параметров:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 = 0.1, \quad \beta_1 = 0.1, \quad \alpha_2 = 0.1, \quad \beta_2 = 0.05, \quad \omega_0 = 4.0, \\
 \alpha_3 = 0.5, \quad \beta_3 = 0.1, \quad \gamma = 0.1, \quad \tau \in \{1.0, 1.25, 2.0, 2.5\},
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{m}_X^0 = \begin{bmatrix} 3.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{XX}^0 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.10 \\ 0.10 & 0.16 \end{bmatrix}.$$

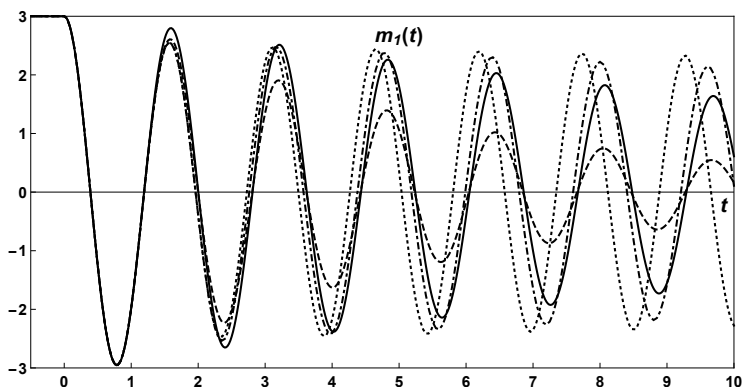


Рис. 1

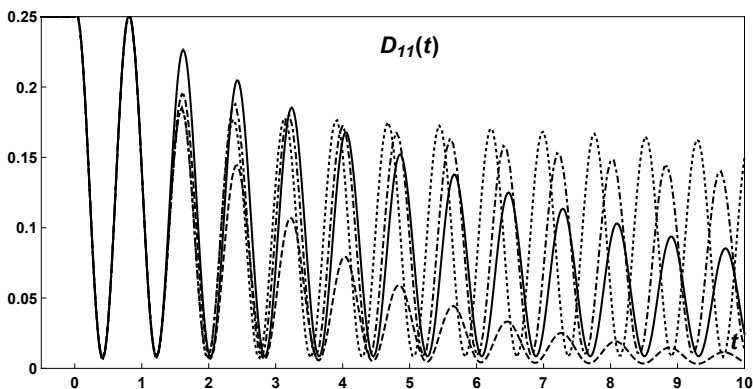


Рис. 2

Отобранная часть результатов этих расчетов представлена на рис. 1–4. Рис. 1 показывают динамику изменения функции математического ожидания  $m_{X_1}(t)$ , рис. 2 – дисперсии  $\mathcal{D}_{X_1 X_1}(t)$ , рис. 3, 4 – нормированных третьего и четвертого центральных моментов  $\mathbb{E}[\tilde{X}_1^3(t)]$  и  $\mathbb{E}[\tilde{X}_1^4(t)]$ , где  $\sigma_1^2(t) = \mathcal{D}_{X_1 X_1}(t)$ ,

$$\tilde{X}_1(t) = \frac{X_1(t) - m_{X_1}(t)}{\sigma_1(t)}.$$

Типы линий (непрерывная, штриховая, пунктирная, штрих-пунктирная) соответствуют порядку длин запаздываний.

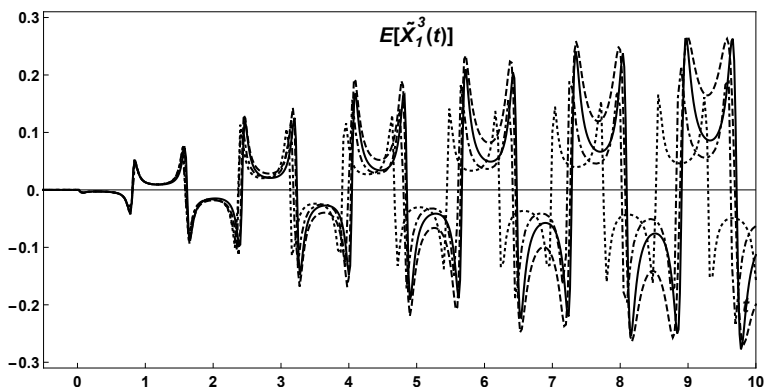


Рис. 3

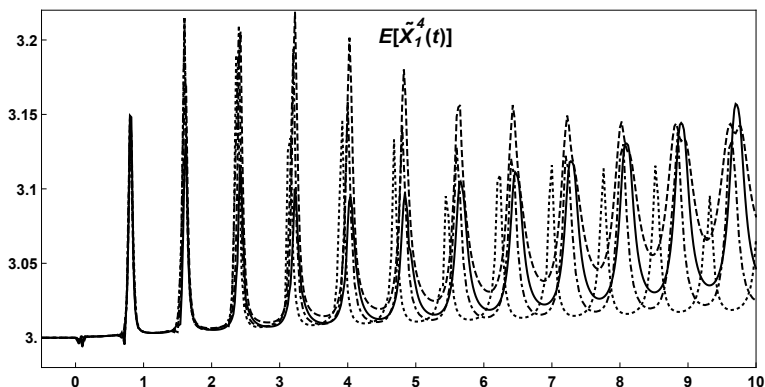


Рис. 4

Анализируя полученные результаты расчетов, несложно установить, что увеличение запаздывания ведет к потере устойчивости рассматриваемой системы по моментам.

### Заключение

В статье изложен аппарат и алгоритмы применения сочетания метода шагов и расширения пространства состояний, предназначенные для расчета старших моментных функций векторов состояний систем линейных параметрических стохастических дифферен-



циальных уравнений с запаздыванием. Представлены структуры уравнений для моментных функций, необходимые расчетные формулы и результаты применения схемы для анализа системы второго порядка.

### Приложение.

Построим общую систему ОДУ, описывающую поведение вектора функций математического ожидания  $\underline{\mathbf{m}}_Z(s) = \{\underline{\mathbf{m}}_i(s)\} = \mathbb{E}[\underline{\mathbf{Z}}(s)]$  и матрицы ковариаций

$$\underline{\mathcal{D}}_{ZZ}(s) = \{\underline{\mathcal{D}}_{ij}(s)\} = \mathbb{E}[\{\underline{\mathbf{Z}}(s) - \underline{\mathbf{m}}_Z(s)\}\{\underline{\mathbf{Z}}(s) - \underline{\mathbf{m}}_Z(s)\}^\top]$$

для вектора состояния  $\underline{\mathbf{Z}}(s) = \{\underline{\mathbf{z}}_i(s)\} \in \mathbb{R}^r$  линейной стохастической дифференциальной системы с аддитивными и мультипликативными шумами в форме Стратоновича:

$$d\underline{\mathbf{Z}}(s) = [\underline{\mathbf{A}}(s)\underline{\mathbf{Z}}(s) + \underline{\mathbf{c}}(s)] ds + [\underline{\mathbf{B}}(s)] :: \underline{\mathbf{Z}}(s) + \underline{\mathbf{g}}(s) \circ d\underline{\mathbf{W}}(s),$$

$$s_* < s \leq s^*, \quad (25)$$

$$\underline{\mathbf{Z}}(s_*) = \underline{\mathbf{Z}}_*, \quad (26)$$

где основная часть обозначений аналогична обозначениям, введенным в первых разделах статья, а точка указывает на производную по  $s$ . Начальное положение – вектор  $\underline{\mathbf{Z}}_* = (\underline{\mathbf{z}}_{*1}, \underline{\mathbf{z}}_{*2}, \dots, \underline{\mathbf{z}}_{*r})$  является случайным вектором, распределенным с плотностью вероятности  $\hat{p}_*(\underline{\mathbf{z}})$ ,  $\underline{\mathbf{z}} = (\underline{\mathbf{z}}_1, \underline{\mathbf{z}}_2, \dots, \underline{\mathbf{z}}_r)$ . Его среднее значение равно  $\underline{\mathbf{m}}_Z^* = \mathbb{E}[\underline{\mathbf{Z}}_*]$ , а его матрица ковариаций –

$$\underline{\mathcal{D}}_{ZZ}^* = \mathbb{E}[(\underline{\mathbf{Z}}_* - \underline{\mathbf{m}}_Z^*)(\underline{\mathbf{Z}}_* - \underline{\mathbf{m}}_Z^*)^\top].$$

Вход  $\{\underline{\mathbf{W}}(s) = \{\underline{\mathbf{W}}_i(s)\}, s_* \leq s \leq s^* \in \mathbb{R}^q\}$  – винеровский стохастический процесс с независимыми компонентами. В уравнениях (25)  $\underline{\mathbf{A}}(s) = \{\underline{\mathbf{a}}_{ij}(s)\}$ ,  $[\underline{\mathbf{B}}(s)] = \{\underline{\mathbf{b}}_{ijk}(s)\}$  и  $\underline{\mathbf{g}}(s) = \{\underline{\mathbf{g}}_{ij}(s)\}$  являются детерминированными вещественными матрицами в  $\mathbb{M}_{r \times r}$ ,  $\mathbb{M}_{r \times q \times r}$  и  $\mathbb{M}_{r \times q}$  соответственно,  $\underline{\mathbf{c}}(s) = \{\underline{\mathbf{c}}_i(s)\} \in \mathbb{R}^r$  – детерминированный вещественный вектор. Предполагается, что элементы всех этих матриц и векторов являются непрерывными функциями относительно аргумента  $s$ .

Коэффициенты сноса  $\hat{a}_i$  и коэффициенты диффузии  $\hat{b}_{ij}$  ФПК-

уравнения

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial s} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^r \frac{\partial^2 (\hat{b}_{ij} \hat{p})}{\partial \underline{z}_i \partial \underline{z}_j} - \sum_{i=1}^r \frac{\partial (\hat{a}_i \hat{p})}{\partial \underline{z}_i}, \quad (27)$$

$$\hat{p}(\underline{z}, s_*) = \hat{p}_*(\underline{z}), \quad (28)$$

где  $\hat{p}(\underline{z}, s)$  – плотность вероятности вектора состояния  $\underline{Z}(s)$  можно рассчитать, если учесть следующие формулы [4, стр. 46–50]:

$$\hat{a}_i = \sum_{\ell=1}^r \underline{a}_{i\ell} \underline{z}_\ell + \underline{c}_i + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^r \sum_{k=1}^q \underline{b}_{ik\nu} \left( \sum_{\ell=1}^r \underline{b}_{\nu k\ell} \underline{z}_\ell + \underline{g}_{\nu k} \right), \quad (29)$$

$$\hat{b}_{ij} = \sum_{k=1}^q \left( \sum_{\ell=1}^r \underline{b}_{ik\ell} \underline{z}_\ell + \underline{g}_{ik} \right) \left( \sum_{\ell=1}^r \underline{b}_{jk\ell} \underline{z}_\ell + \underline{g}_{jk} \right). \quad (30)$$

Используя уравнение (27) и соотношения (29), (30), мы можем получить ОДУ для разных моментных функций  $M_\alpha(t) = \mathbb{E}[Z^\alpha]$ :

$$\begin{aligned} \dot{M}_\alpha &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \alpha_i (\alpha_i - 1) \times \\ &\times \sum_{k=1}^q \left( \underline{g}_{ik}^2 M_{\alpha-2e_i} + 2 \underline{g}_{ik} \sum_{\ell=1}^r \underline{b}_{ik\ell} M_{\alpha-2e_i+e_\ell} + \sum_{\ell,\nu=1}^r \underline{b}_{ik\ell} \underline{b}_{ik\nu} M_{\alpha-2e_i+e_{\ell\nu}} \right) \\ &+ \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r \alpha_i \alpha_j \sum_{k=1}^q \left[ \underline{g}_{ik} \underline{g}_{jk} M_{\alpha-e_{ij}} + \sum_{\ell=1}^r \left( \underline{g}_{ik} \underline{b}_{jk\ell} + \underline{g}_{jk} \underline{b}_{ik\ell} \right) M_{\alpha-e_{ij}+e_\ell} \right. \\ &+ \left. \sum_{\ell,\nu=1}^r \underline{b}_{ik\ell} \underline{b}_{jk\nu} M_{\alpha-e_{ij}+e_{\ell\nu}} \right] + \sum_{i=1}^n \alpha_i \left[ \sum_{\ell=1}^r \underline{a}_{i\ell} M_{\alpha-e_i+e_\ell} + \underline{c}_i M_{\alpha-e_i} \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^q \underline{b}_{ikj} \left( \underline{g}_{jk} M_{\alpha-e_i} + \sum_{\ell=1}^r \underline{b}_{jk\ell} M_{\alpha-e_i+e_\ell} \right) \right], \quad \alpha \geq 0, \quad (31) \end{aligned}$$

где  $M_0 = 1$ ,  $\alpha$  – мультииндекс.

В частности, уравнения для математических ожиданий и дисперсий принимают следующий вид:

$$\dot{\underline{m}}_Z(s) = \underline{f}(\underline{m}_Z(s), s), \quad \underline{m}_Z(s_*) = \underline{m}_Z^*, \quad (32)$$

$$\dot{\underline{\mathcal{D}}}_{ZZ}(s) = \underline{\mathcal{F}}(\underline{\mathcal{D}}_{ZZ}(s), \underline{\mathbf{m}}_Z(s), s), \quad \underline{\mathcal{D}}_{ZZ}(s_*) = \underline{\mathcal{D}}_{ZZ}^*, \quad (33)$$

где  $\underline{\mathbf{f}} = \{\underline{f}_i\} \in \mathbb{R}^r$  и  $\underline{\mathcal{F}} = \{\underline{\mathcal{F}}_{ij}\} \in \mathbb{M}_{r \times r}$  – детерминированные векторная и матричная функции, компоненты которых можно вычислить, если воспользоваться соотношениями вида:

$$\underline{f}_i = \sum_{\ell=1}^r a_{i\ell} \underline{m}_\ell + c_i + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^r \sum_{k=1}^q b_{ik\nu} \left( \sum_{\ell=1}^r b_{\nu k\ell} \underline{m}_\ell + g_{\nu k} \right),$$

$$i = 1, 2, \dots, r; \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{F}}_{ij} = & \sum_{\ell=1}^r \left[ \underline{\mathcal{D}}_{i\ell} \left( a_{j\ell} + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^r \sum_{k=1}^q b_{j k\nu} b_{\nu k\ell} \right) + \right. \\ & \left. + \underline{\mathcal{D}}_{j\ell} \left( a_{i\ell} + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^r \sum_{k=1}^q b_{i k\nu} b_{\nu k\ell} \right) \right] + \\ & + \sum_{k=1}^q \left[ \sum_{\ell_1, \ell_2=1}^r b_{i k\ell_1} b_{j k\ell_2} (\underline{\mathcal{D}}_{\ell_1 \ell_2} + \underline{\mathbf{m}}_{\ell_1} \underline{\mathbf{m}}_{\ell_2}) + \right. \\ & \left. + \sum_{\ell=1}^r (g_{i k} b_{j k\ell} + g_{j k} b_{i k\ell}) \underline{m}_\ell + g_{i k} g_{j k} \right], \\ & i, j = 1, 2, \dots, r. \end{aligned} \quad (35)$$

## Библиографический список

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 384 с.
2. *Болотин В.В.* Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 336 с.
3. *Кузнецов Д.Ф.* Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. 4-е изд. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. XXX, 786 с.
4. *Маланин В.В., Полосков И.Е.* Методы и практика анализа случайных процессов в динамических системах: учеб. пособие. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005. 296 с.

5. *Мышкис А.Д.* Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Успехи математических наук. 1949. Т. 4, вып. 5 (33). С. 99–141.

6. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М., Л.: ГИТТЛ, 1951. 256 с.

7. *Полосков И.Е.* Расширение фазового пространства в задачах анализа дифференциально-разностных систем со случайным входом // Автоматика и телемеханика. 2002. № 9. С. 58–73.

8. *Рубаник В.П.* Колебания сложных квазилинейных систем с запаздыванием. Мн.: Изд-во "Университетское", 1985. 143 с.

9. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977. 486 с.

10. *Царьков Е.Ф.* Системы стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием // Изв. АН Латв. ССР. Сер. физ. и техн. наук. 1966. № 2. С. 57–64.

11. *Царьков Е.Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. Рига: Зинатне, 1989. 421 с.

12. *Bainov D.D., Mishev D.* Oscillation theory for neutral differential equations with delay. Bristol: Adam Hilger, 1991. VIII, 280 p.

13. *Bellen A., Zennaro M.* Numerical methods for delay differential equations. Oxford: Oxford University Press, 2003. XIV, 395 p.

14. *Buckwar E.* Introduction to the numerical analysis of stochastic delay differential equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2000. Vol. 125, № 1–2. P. 297–307.

15. *Erneux T.* Applied delay differential equations. New York: Springer, 2009. XII, 204 p.

16. *Fridman E.* Introduction to time-delay systems: Analysis and control. Basel: Birkhäuser, 2014. XVIII, 362 p.

17. *Hale J.K., Lunel S.M.V.* Introduction to functional differential equations. New York: Springer, 1993. X, 447 p.

18. *Ivanov A.F., Kazmerchuk Y.I., Swishchuk A.V.* Theory, stochastic stability and applications of stochastic delay differential equations: a survey of recent results // Differential Equations and Dynamical Systems. 2003. Vol. 11, № 1. P. 55–115.

19. *Kloeden P.E., Platen E.* Numerical solution of stochastic differential equations. Berlin: Springer-Verlag, 1995. XXXV, 632 p.

20. *Krée P., Soize C.* Mathematics of random phenomena: Random vibrations of mechanical structures. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1986. XV, 438 p.

21. *Küchler U., Platen E.* Strong discrete time approximation of stochastic differential equations with time delay // Mathematics and Computers in Simulation. 2000. Vol. 54, № 1–3. P. 189–205.

22. *Kushner H.J.* Numerical methods for controlled stochastic delay systems. Boston: Birkhauser, 2008. XIX, 281 p.

23. *Lakshmanan M., Senthilkumar D.V.* Dynamics of nonlinear time-delay systems. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. XVII, 313 p.

24. *Lakshmikantham V., Rao M.R.M.* Theory of integro-differential equations. Reading, UK: Gordon and Breach Science Publishers, 1995. 384 p.

25. *Lin Y.K., Cai G.Q.* Probabilistic Structural Dynamics. New York: McGraw-Hill, 2004. 562 p.

26. *Longtin A.* Stochastic delay-differential equations // Complex Time-Delay Systems. Understanding Complex Systems / F.M. Atay (ed.). Berlin, Heidelberg: Springer, 2010. P. 177–195.

27. *Mao X.* Stochastic differential equations and applications. 2nd ed. Cambridge, UK: Woodhead Publishing, 2011. XVIII, 422 p.

28. *Milstein G.N., Tretyakov M.V.* Stochastic numerics for mathematical physics. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2004. XIX, 594 p.

29. *Mangano S.* Mathematica cookbook. Cambridge: O'Reilly, 2010. XXIV, 800 p.

30. *Mohammed S.E.A.* Retarded functional differential equations: A global point of view. London: Pitman Publishing, 1978. V, 147 p.

31. *Mohammed S.E.A.* Stochastic functional differential equations. Boston, London: Pitman Publishing, 1984. IX, 245 p.

32. *Padgett W.J., Tsokos C.P.* Stochastic integro-differential equations of Volterra type // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1972. Vol. 23, № 4. P. 499–512.

33. *Poloskov I.E.* Symbolic-numeric algorithms for analysis of stochastic systems with different forms of aftereffect // Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics (PAMM). 2007. Vol. 7, № 1. P.2080011–2080012.

34. *Poloskov I.E.* Numerical and analytical methods of study of stochastic systems with delay // *Journal of Mathematical Sciences*. 2018. Vol. 230, № 5. P. 746–750.

35. *Schueller G.I., Pradlwarter H.J.* Uncertain linear systems in dynamics: Retrospective and recent developments by stochastic approaches // *Engineering Structures*. 2009. Vol. 31, № 11. P. 2507–2517.

36. *Shampine L.F., Gladwell I., Thompson S.* Solving ODEs with Matlab. – Cambridge: University Press, 2003. – 272 p.

37. *Smith H.* An introduction to delay differential equations with applications to the life sciences. New York: Springer, 2011. XI, 172 p.

38. *Soize C.* Uncertainty quantification: An accelerated course with advanced applications in computational engineering. Cham: Springer, 2017. XXII, 329 p.

39. *Soong T.T., Grigoriu M.* Random vibrations of structural and mechanical systems. Englewood Cliffs (NY): Prentice Hall, 1993. 402 p.

40. *Wang Z., Li X., Lei J.* Second moment boundedness of linear stochastic delay differential equations // *Discrete & Continuous Dynamical Systems – B*. 2014. Vol. 19, № 9. P. 2963–2991.

41. *Wu J.* Theory and applications of partial functional differential equations. New York: Springer-Verlag, 1996. X, 432 p.