

УДК 62–50

Н.А. Стрелкова, О.С. Агибалова

*Пермский государственный национальный
исследовательский университет*

Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
8 (342) 2-396-309

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ПО ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ ЗАТРАТАМ УПРАВЛЕНИЯ ВРАЩЕНИЯМИ ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рассматривается задача оптимального по энергетическим затратам гашения экваториальной составляющей угловой скорости динамически симметричного твердого тела при заданных ограничениях на управляющие внешние моменты. С использованием принципа максимума Л.С. Понтрягина и метода усреднения определены оптимальные управления в форме синтеза, угловые скорости, минимальные энергетические затраты. Указано условие, когда решение рассматриваемой задачи не существует.

Ключевые слова: оптимальное управление; вращение твердого тела; минимум энергетических затрат.

Постановка задачи

Уравнения управляемого вращения динамически симметричного твердого тела относительно центра масс имеют вид [1, 2]

$$\begin{cases} J\dot{p} + (J_3 - J)qr = M_1, & p(0) = p^0, \\ J\dot{q} - (J_3 - J)pr = M_2, & q(0) = q^0, \\ J_3\dot{r} = M_3, & r(0) = r^0. \end{cases}$$

Здесь J, J_3 ($J \neq J_3$) – главные центральные моменты инерции твердого тела, p, q, r – проекции вектора угловой скорости на главные центральные оси инерции, M_i ($i = 1, 2, 3$) – управляющие моменты: $|M_i| \leq M_i^0$. Предполагается, что управляющий момент мал, т. е. $M^0 = \sqrt{M_1^{02} + M_2^{02} + M_3^{02}} \ll \frac{1}{2} J (p^{02} + q^{02}) + \frac{1}{2} J_3 r^{02}$. После перехода к безразмерным переменным и параметрам по формулам [1, 2]

$$\omega_1 = \frac{p}{\omega^0}, \quad \omega_2 = \frac{q}{\omega^0}, \quad \omega_3 = \frac{r}{\omega^0}, \quad u_i = \frac{M_i}{M^0}, \quad I = \frac{J_3}{J},$$

$$t = \omega^0 t', \quad \omega^0 = \sqrt{\omega_1^{02} + \omega_2^{02} + \omega_3^{02}},$$

получаем

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 + (I - 1)\omega_2\omega_3 = \varepsilon u_1, & \omega_1(0) = \omega_1^0, \\ \dot{\omega}_2 - (I - 1)\omega_1\omega_3 = \varepsilon u_2, & \omega_2(0) = \omega_2^0, \\ I\dot{\omega}_3 = \varepsilon u_3, & \omega_3(0) = \omega_3^0, \quad \varepsilon = \frac{M^0}{J\omega^{02}} \ll 1. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь точка означает дифференцирование по времени t' , однако в дальнейшем для упрощения записи штрих опускаем.

Рассматривается задача гашения экваториальной составляющей угловой скорости, в конечный момент времени $t = T$:

$$\omega_1(T) = \omega_2(T) = 0. \quad (2)$$

Предполагается, что функция $\omega_3(t)$ является заданной функцией времени t .

Требуется найти управляющие функции $u_1(t), u_2(t)$, доставляющие минимум функционалу энергетических затрат

$$J = \varepsilon \int_0^T (u_1^2 + u_2^2) dt, \quad (3)$$

где время перехода T задано.

В работах [3, 4] управление изменением экваториальной составляющей угловой скорости осуществлялось с помощью пары поворотных (верньерных) двигателей ($u_1^2 + u_2^2 \leq u^0{}^2$, $u^0 = \text{const} > 0$) и одного фиксированного двигателя ($u_1 = u \cos \alpha$, $u_2 = u \sin \alpha$, $|u| \leq u^0$, $\alpha = \text{const}$). В данной работе управление осуществляется при помощи двух фиксированных двигателей, когда система управления создает моменты сил вдоль каждой из связанных осей, причем

$$|u_1| \leq u_1^0 = \text{const} > 0, |u_2| \leq u_2^0 = \text{const} > 0. \quad (4)$$

Построение оптимального решения

С помощью замены переменных

$$\omega_1 = a \cos \varphi - b \sin \varphi,$$

$$\omega_2 = a \sin \varphi + b \cos \varphi, \quad \varphi = \int_0^t (I - 1) \omega_3(\tau) d\tau \quad (5)$$

первые два уравнения системы (1) и краевые условия преобразуем к следующему виду [1, 2]

$$\begin{cases} \dot{a} = u_1 \cos \varphi + u_2 \sin \varphi, \\ \dot{b} = -u_1 \sin \varphi + u_2 \cos \varphi, \end{cases} \quad (6)$$

$$a(0) = \omega_1^0, \quad b(0) = \omega_2^0, \quad (7)$$

$$a(T) = b(T) = 0. \quad (8)$$

Для решения задачи (3), (4), (6)–(8) воспользуемся принципом максимума Л.С. Понтрягина [5]. Составим функцию Гамильтона–Понтрягина:

$$\begin{aligned} H = & -\varepsilon u^2 + p_a \varepsilon (u_1 \cos \varphi + u_2 \sin \varphi) + \\ & + p_b \varepsilon (-u_1 \sin \varphi + u_2 \cos \varphi). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь p_a, p_b – переменные, сопряженные a и b соответственно. Из сопряженной системы получаем, что переменные $p_a, p_b = \text{const}$.

Введем обозначения

$$\cos \gamma = \frac{p_a}{p}, \quad \sin \gamma = \frac{p_b}{p}, \quad p = \sqrt{p_a^2 + p_b^2} \quad (10)$$

и преобразуем функцию Гамильтона–Понтрягина (9) к следующему виду

$$H = \varepsilon \left[- \left(u_1 - \frac{p \cos(\varphi + \gamma)}{2} \right)^2 + \frac{p^2 \cos^2(\varphi + \gamma)}{4} - \right. \\ \left. - \left(u_2 - \frac{p \sin(\varphi + \gamma)}{2} \right)^2 + \frac{p^2 \sin^2(\varphi + \gamma)}{4} \right]. \quad (11)$$

Введем в рассмотрение функцию насыщения $\text{sat}\{\cdot\}$ [6]. Из условия максимума функции Гамильтона–Понтрягина (11) и соотношений (4) найдем оптимальные управления

$$u_1^* = \text{sat} \left(\frac{p \cos(\varphi + \gamma)}{2} \right) = \\ = \begin{cases} \frac{p \cos(\varphi + \gamma)}{2}, & \text{если } \left| \frac{p \cos(\varphi + \gamma)}{2} \right| \leq u_1^0, \\ u_1^0 \text{sign} \cos(\varphi + \gamma), & \text{если } \left| \frac{p \cos(\varphi + \gamma)}{2} \right| > u_1^0, \end{cases} \quad (12)$$

$$u_2^* = u_2^0 \text{sat} \left(\frac{p \sin(\varphi + \gamma)}{2} \right) = \\ = \begin{cases} \frac{p \sin(\varphi + \gamma)}{2}, & \text{если } \left| \frac{p \sin(\varphi + \gamma)}{2} \right| \leq u_2^0, \\ u_2^0 \text{sign} \sin(\varphi + \gamma), & \text{если } \left| \frac{p \sin(\varphi + \gamma)}{2} \right| > u_2^0, \end{cases} \quad (13)$$

Подставим u_1^*, u_2^* в систему уравнений (6) и воспользуемся методом усреднения для построения приближенного решения задач оптимального управления с фиксированным временем окончания процесса [1, 2]. Усредняя по фазе φ , получим уравнения

$$\begin{cases} \dot{a} = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\cos \varphi \operatorname{sat} \left(\frac{p \cos(\varphi + \gamma)}{2} \right) + \sin \varphi \operatorname{sat} \left(\frac{p \sin(\varphi + \gamma)}{2} \right) \right] d\varphi, \\ \dot{b} = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\cos \varphi \operatorname{sat} \left(\frac{p \sin(\varphi + \gamma)}{2} \right) - \sin \varphi \operatorname{sat} \left(\frac{p \cos(\varphi + \gamma)}{2} \right) \right] d\varphi. \end{cases} \quad (14)$$

Учитывая периодичность подынтегральных функций, вычислим интегралы

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \cos(\varphi + \gamma) \operatorname{sat} \left(\frac{p \cos(\varphi + \gamma)}{2} \right) d\varphi = \\ & = 4 \int_0^{\psi_1} u_1^0 \cos \psi d\psi + 2 \int_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}} p \cos^2 \psi d\psi = \\ & = 4u_1^0 \sin \psi_1 + p \left(\frac{\pi}{2} - \psi_1 - \sin \psi_1 \cos \psi_1 \right), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(\varphi + \gamma) \operatorname{sat} \left(\frac{p \cos(\varphi + \gamma)}{2} \right) d\varphi = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(\varphi + \gamma) \operatorname{sat} \left(\frac{p \sin(\varphi + \gamma)}{2} \right) d\varphi = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(\varphi + \gamma) \operatorname{sat} \left(\frac{p \sin(\varphi + \gamma)}{2} \right) d\varphi =$$

$$= 2 \int_0^{\psi_2} p \sin^2 \psi d\psi + 4 \int_{\psi_2}^{\frac{\pi}{2}} u_2^0 \sin \psi d\psi =$$

$$= 4u_2^0 \cos \psi_2 + p(\psi_2 - \sin \psi_2 \cos \psi_2),$$

(16)

где ψ_1, ψ_2 удовлетворяют соответственно равенствам

$$p \cos \psi_1 = 2u_1^0, \quad p \sin \psi_2 = 2u_2^0. \quad (17)$$

Введем обозначения

$$4u_1^0 \sin \psi_1 + p \left(\frac{\pi}{2} - \psi_1 - \sin \psi_1 \cos \psi_1 \right) = A, \quad (18)$$

$$4u_2^0 \cos \psi_2 + p (\psi_2 - \sin \psi_2 \cos \psi_2) = B$$

и вычислим, используя соотношения (15), (16), интегралы правых частей системы (14)

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi \operatorname{sat} \left(\frac{p \cos(\varphi + \gamma)}{2} \right) d\varphi = A \cos \gamma,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \varphi \operatorname{sat} \left(\frac{p \sin(\varphi + \gamma)}{2} \right) d\varphi = B \cos \gamma,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \varphi \operatorname{sat} \left(\frac{p \cos(\varphi + \gamma)}{2} \right) d\varphi = -A \sin \gamma,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi \operatorname{sat} \left(\frac{p \sin(\varphi + \gamma)}{2} \right) d\varphi = B \sin \gamma.$$

Тогда уравнения для усредненных фазовых переменных примут вид

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon \frac{A+B}{2\pi} \cos \gamma, \\ \dot{b} = \varepsilon \frac{A+B}{2\pi} \sin \gamma. \end{cases}$$

Найдем общее решение данной системы уравнений

$$a = \varepsilon \frac{A+B}{2\pi} \cos \gamma t + C_1, \quad (19)$$

$$b = \varepsilon \frac{A+B}{2\pi} \sin \gamma t + C_2.$$

Из краевых условий (7), (8) следует, что

$$C_1 = \omega_1^0, \quad C_2 = \omega_2^0, \quad (20)$$

$$A+B = \frac{2\pi}{\varepsilon T} \omega^0, \quad (21)$$

$$\cos \gamma = -\frac{\omega_1^0}{\omega^0}, \quad \sin \gamma = -\frac{\omega_2^0}{\omega^0}, \quad (22)$$

где $\omega^0 = \sqrt{\omega_1^{0^2} + \omega_2^{0^2}}$.

Подставим значения констант (20)–(22) в соотношения (19) и преобразуем полученные выражения к следующему виду

$$\begin{aligned} a &= \omega_1^0 \left(1 - \frac{t}{T} \right), \\ b &= \omega_2^0 \left(1 - \frac{t}{T} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Из соотношений (17), (18), (21) получаем, что для определения неизвестных постоянных ψ_1, ψ_2 следует найти решение системы двух трансцендентных уравнений

$$\begin{cases} u_1^0 \sin \psi_1 + \frac{u_1^0}{\cos \psi_1} \left(\frac{\pi}{2} - \psi_1 \right) + u_2^0 \cos \psi_2 + \frac{u_2^0 \psi_2}{\sin \psi_2} = \frac{\pi}{\varepsilon T} \omega^0, \\ u_2^0 \cos \psi_1 = u_1^0 \sin \psi_2. \end{cases} \quad (24)$$

Используя выражения (5), (23), найдем угловые скорости $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \left(1 - \frac{t}{T} \right) \left(\omega_1^0 \cos \varphi - \omega_2^0 \sin \varphi \right), \\ \omega_2 &= \left(1 - \frac{t}{T} \right) \left(\omega_1^0 \sin \varphi + \omega_2^0 \cos \varphi \right), \\ \varphi &= \int_0^t (I - 1) \omega_3(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (25)$$

Воспользуемся равенствами (17) и преобразуем формулы (12), (13) к виду

$$u_1^* = \begin{cases} \frac{u_1^0 \cos(\varphi + \gamma)}{\cos \psi_1}, & \text{если } \left| \frac{\cos(\varphi + \gamma)}{\cos \psi_1} \right| \leq 1, \\ u_1^0 \operatorname{sign} \cos(\varphi + \gamma), & \text{если } \left| \frac{\cos(\varphi + \gamma)}{\cos \psi_1} \right| > 1, \end{cases} \quad (26)$$

$$u_2^* = \begin{cases} \frac{u_2^0 \sin(\varphi + \gamma)}{\sin \psi_2}, & \text{если } \left| \frac{\sin(\varphi + \gamma)}{\sin \psi_2} \right| \leq 1, \\ u_2^0 \operatorname{sign} \sin(\varphi + \gamma), & \text{если } \left| \frac{\sin(\varphi + \gamma)}{\sin \psi_2} \right| > 1. \end{cases} \quad (27)$$

Применяя соотношения (22), (23), (5), вычислим $\cos(\varphi + \gamma)$ и $\sin(\varphi + \gamma)$

$$\begin{aligned}\cos(\varphi + \gamma) &= \frac{-a \cos \varphi + b \sin \varphi}{\sqrt{a^2 + b^2}} = -\frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}, \\ \sin(\varphi + \gamma) &= -\frac{a \sin \varphi + b \cos \varphi}{\sqrt{a^2 + b^2}} = -\frac{\omega_2}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}.\end{aligned}\quad (28)$$

Подставив найденные значения (28) в (26), (27), получаем оптимальные управления u_1^* , u_2^* в форме синтеза

$$u_1^* = \begin{cases} -\frac{u_1^0}{\cos \psi_1} \frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}, & \text{если } \left| \frac{\omega_1}{\cos \psi_1 \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} \right| \leq 1, \\ -u_1^0 \operatorname{sign} \omega_1, & \text{если } \left| \frac{\omega_1}{\cos \psi_1 \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} \right| > 1, \end{cases} \quad (29)$$

$$u_2^* = \begin{cases} -\frac{u_2^0}{\sin \psi_2} \frac{\omega_2}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}, & \text{если } \left| \frac{\omega_2}{\sin \psi_2 \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} \right| \leq 1, \\ -u_2^0 \operatorname{sign} \omega_2, & \text{если } \left| \frac{\omega_2}{\sin \psi_2 \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} \right| > 1. \end{cases} \quad (30)$$

В первом приближении минимальное значение функционала (3) вычисляется по формуле

$$J^* = \varepsilon \int_0^T \langle u_1^{*2} + u_2^{*2} \rangle dt, \quad (31)$$

Здесь $\langle u_1^{*2} + u_2^{*2} \rangle$ – функция, полученная в результате подстановки в (31) управлений u_1^* , u_2^* из (29), (30) и усреднения по фазе φ .

Рассмотрим три предельных случая.

Если $\psi_1 = \frac{\pi}{2}$, то из второго уравнения (24) следует, что $\psi_2 = 0$ и тогда управления u_1^* , u_2^* являются кусочно-постоянными функциями. Из первого уравнения системы (24) получаем, что время окончания процесса удовлетворяет равенству

$$T_1 = \frac{\pi \sqrt{\omega_1^{02} + \omega_2^{02}}}{2\varepsilon \frac{u_1^0}{u_1^0 + u_2^0}}. \quad (32)$$

В этом случае оптимальный по энергетическим затратам режим совпадает с оптимальным по быстродействию режимом гашения экваториальной составляющей угловой скорости и синтез оптимального управления получаем в виде

$$u_1^* = -u_1^0 \operatorname{sign} \omega_1, \quad u_2^* = -u_2^0 \operatorname{sign} \omega_2. \quad (33)$$

При $T = T_1$ энергетические затраты равны $J^* = \varepsilon u^{02} T_1$. При $T < T_1$ рассматриваемая задача решения не имеет. Отметим, что задача оптимального по быстродействию управления гашением экваториальной составляющей угловой скорости рассматривалась в работах [1, 2] при произвольной зависимости осевой составляющей угловой скорости от времени, а в работе [6] – при $\omega_3 = \operatorname{const}$.

Если $\psi_1 = 0$ (управление u_1^* не имеет точек переключения), то из системы уравнений (24) получаем, что $\psi_2 = \arcsin \frac{u_2^0}{u_1^0}$

и время окончания процесса равно

$$T_2 = \frac{\pi \sqrt{\omega_1^{02} + \omega_2^{02}}}{\varepsilon} \left(u_1^0 \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{u_2^0}{u_1^0} \right) + \frac{u_2^0}{u_1^0} \sqrt{u_1^{02} - u_2^{02}} \right)^{-1}. \quad (34)$$

Эта ситуация реализуется только при условии, что $u_2^0 \leq u_1^0$. Если $\psi_2 = \frac{\pi}{2}$ (управление u_2^* не имеет точек переключения), то из системы уравнений (24) получаем, что $\psi_1 = \arccos \frac{u_1^0}{u_2^0}$ и время окончания процесса равно

$$T_3 = \frac{\pi \sqrt{\omega_1^{0^2} + \omega_2^{0^2}}}{\varepsilon} \left(u_2^0 \left(\pi - \arccos \frac{u_1^0}{u_2^0} \right) + \frac{u_1^0}{u_2^0} \sqrt{u_2^{0^2} - u_1^{0^2}} \right)^{-1}. \quad (35)$$

Эта ситуация реализуется только при условии, что $u_1^0 \leq u_2^0$.

Отметим, что если $u_1^0 = u_2^0 = u^0$, то

$$T_2 = T_3 = \frac{\sqrt{\omega_1^{0^2} + \omega_2^{0^2}}}{\varepsilon u^0}, \quad (36)$$

управления u_1^* , u_2^* вычисляются по формулам

$$u_1^* = -u^0 \frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}, \quad u_2^* = -u^0 \frac{\omega_2}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}, \quad (37)$$

а энергетические затраты равны $J^* = 2\varepsilon u^{0^2} T_2$. Найдем оптимальные управления при $T > \max(T_2, T_3)$ (в этом случае управления u_1^* , u_2^* являются не имеют точек переключений и не достигают своих предельных значений). Из соотношений (10), (12), (13) следует, что

$$u_1^* = \frac{p_a \cos \varphi - p_b \sin \varphi}{2}, \quad u_2^* = \frac{p_a \sin \varphi + p_b \cos \varphi}{2}. \quad (38)$$

Подставим полученные выражения в систему уравнений (6) и произведем усреднение по фазе φ

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon \frac{p_a}{2}, \\ \dot{b} = \varepsilon \frac{p_b}{2}. \end{cases} \quad (39)$$

Проинтегрируем эту систему дифференциальных уравнений, учтем краевые условия (7), (8) и найдем

$$p_a = -\frac{2\omega_1^0}{\varepsilon T}, \quad p_b = -\frac{2\omega_2^0}{\varepsilon T}, \quad (40)$$

а затем решение системы (39). Это решение описывается выражениями (23). Из соотношений (38), (40) следует, что

$$u_1^* = \frac{-\omega_1^0 \cos \varphi + \omega_2^0 \sin \varphi}{\varepsilon T}, \quad u_2^* = \frac{-\omega_1^0 \sin \varphi - \omega_2^0 \cos \varphi}{\varepsilon T}. \quad (41)$$

Воспользуемся формулами (25), (41) и найдем оптимальные управления в форме синтеза

$$u_1^* = -\frac{\omega_1}{\varepsilon(T-t)}, \quad u_2^* = -\frac{\omega_2}{\varepsilon(T-t)}. \quad (42)$$

Отметим, что при $T = T_2$ и $u_1^0 = u_2^0 = u^0$ приходим, с учетом соотношений (25), к выражениям (37), а при $T > \max(T_2, T_3)$ оптимальные управления u_1^*, u_2^* удовлетворяют неравенствам $-u_1^0 < u_1^* < u_1^0$, $-u_2^0 < u_2^* < u_2^0$.

Вычислим минимальные затраты энергии, используя соотношения (25), (31), (42)

$$J = \frac{\omega_1^{02} + \omega_2^{02}}{\varepsilon T}. \quad (43)$$

Угловые скорости $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ при всех T , выражаются формулами (25).

Примеры

Рассмотрим задачу оптимального управления экваториальной составляющей угловой скорости твердого тела из начального состояния $\omega_1(0) = 0.5$, $\omega_2(0) = 0.5\sqrt{3}$ в конечное положение (2). Предполагается, что отношение главных центральных моментов инерции твердого тела $I = 2$, малый параметр $\varepsilon = 0.1$, предельные значения управлений $u_1^0 = 1$, $u_2^0 = 2$, а осевая составляющая угловой скорости изменяется по линейному закону $\omega_3(t) = 0.08t$.

Вычислим по формуле (32) время окончания процесса $T = \frac{5\pi}{3}$ (минимальное время, при котором еще возможен переход из заданного начального положения в конечное (2)).

Управление $u_1^* = -1$ при $t \in [0, 3.618]$ и $u_1^* = +1$ при $t \in \left[3.618, \frac{5\pi}{3}\right]$, управление $u_2^* = -2$ при всех $t \in \left[0, \frac{5\pi}{3}\right]$. Затраты энергии на управление равны $J^* = 2.618$.

На рис. 1–2 изображены графики, иллюстрирующие полученное решение.

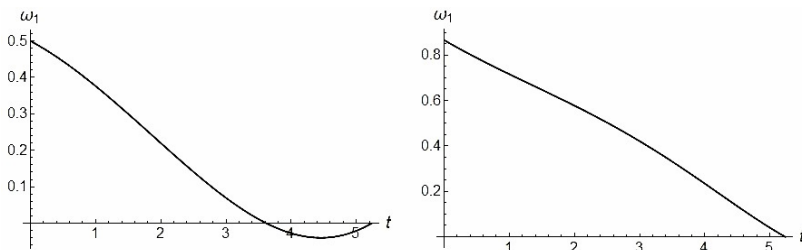


Рис. 1

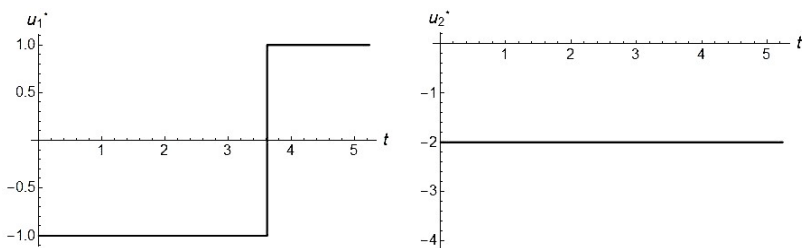


Рис. 2

В рассматриваемой задаче $u_1^0 < u_2^0$.

Используя формулу (35), вычислим время окончания процесса $T = 6.215$.

На рис. 3–4 представлены графики зависимостей угловых скоростей ω_1 , ω_2 и управлений u_1^* , u_2^* от времени.

Момент переключения оптимального управления u_1^* равен $\tau = 5.330$, управление u_2^* не имеет точек переключения.

Минимальное значение функционала энергетических затрат равно $J^* = 2.273$.

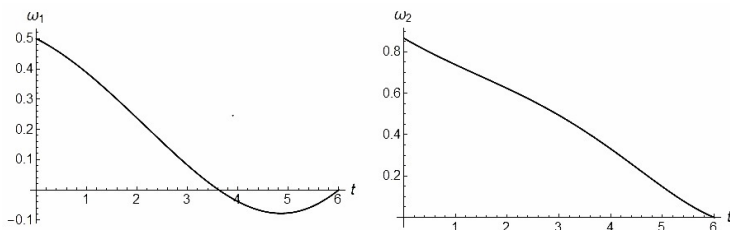


Рис. 3

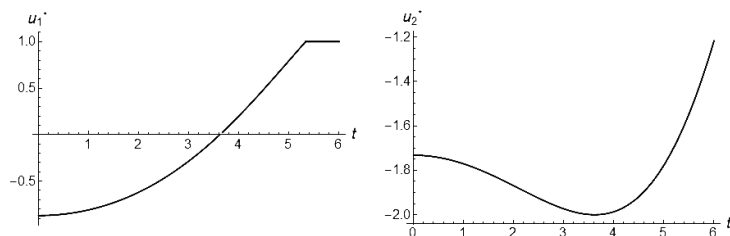


Рис. 4

Примем $T = 10$. Для определения оптимального решения воспользуемся соотношениями (25), (41), (43). Графики зависимостей угловых скоростей $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ и оптимальных управлений $u_1^*(t)$, $u_2^*(t)$ приведены на рис. 5–6.

В данном случае управления u_1^* , u_2^* не имеют точек переключений и не достигают своих предельных значений u_1^0 , u_2^0 .

Минимальные энергетические затраты равны $J^* = 1$.

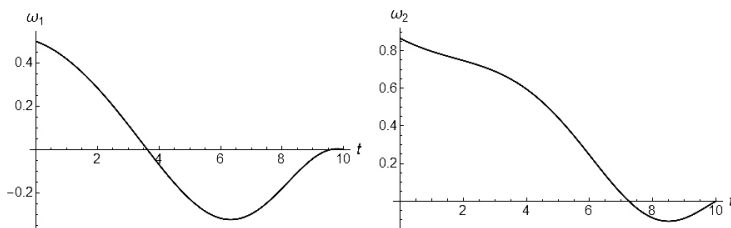


Рис. 5

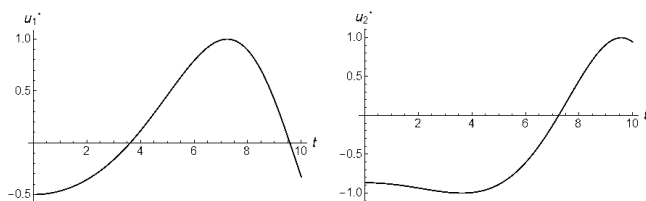


Рис. 6

Заключение

В аналитическом виде получено приближенное решение задачи оптимального по энергетическим затратам управления гашением экваториальной составляющей угловой скорости динамически симметричного твердого тела при заданных ограничениях на компоненты управляющего внешнего момента. Определены оптимальные управления в форме синтеза, угловые скорости, минимальные значения функционала энергетических затрат при различных режимах реализации управления. Указано соотношение, при выполнении которого рассматриваемая задача решения не имеет. Представлены конкретные примеры построения оптимального решения при заданных граничных условиях.

Библиографический список

1. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 384 с.
2. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 368 с.
3. Стрелкова Н.А., Агibalова О.С. К задаче оптимального управления вращениями динамически симметричного твердого тела // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. Пермь, 2017. Вып. 49. С. 97–107.
4. Стрелкова Н.А., Агibalова О.С. К задаче об управляемых вращениях динамически симметричного твердого тела // Вестник Пермского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 3(42). С. 89–94.
5. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкrelидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.
6. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968. 764 с.