

УДК 519.7

С.В. Лутманов

*Пермский государственный национальный
исследовательский университет*

Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
svlut@yandex.ru; 8 (342) 2-396-375

УПРАВЛЕНИЕ ПОЛЕТОМ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПРИ НАЛИЧИИ ПРЕПЯТСТВИЯ

Рассматривается управляемая материальная точка, движущаяся в горизонтальной плоскости и испытывающая сопротивление, пропорциональное квадрату скорости. На плоскости имеется препятствие в форме замкнутого выпуклого множества. Начальное положение и начальная скорость точки известны лишь приблизительно. Точные значения начальных условий становятся известными только в момент старта. Конечная скорость точки может быть любая.

Решена задача перевода точки из начального положения в конечное положение. При этом в процессе движения точка не допускает столкновения с препятствием.

Ключевые слова: математическая модель; линеаризованные дифференциальные уравнения; программное управление; оптимальное управление; базовый закон движения; базовое управление.

Введение

Данная работа является продолжением цикла статей [3–8], посвященных коррекции возмущенного движения управляемого динамического объекта с целью выхода его на базовый закон движения. В предлагаемой статье управляемый динамический объект отождествляется с материальной точкой, движущейся в горизонтальной плоскости и испытывающей сопротивление, пропорциональное квадрату скорости.

На плоскости имеется препятствие в форме замкнутого выпуклого множества. Управление точкой производится на заданном промежутке времени посредством силы, приложенной к точке.

Цель управления перевести точку из начального положения в заданное конечное положение, так, чтобы избежать столкновения с препятствием. Начальное положение и начальная скорость точки известны лишь приблизительно. Их значения будем называть базовыми начальными условиями. Точные значения начальных условий становятся известными только в момент старта. Конечная скорость точки может быть любая.

1. Описание управляемого динамического объекта и постановка задачи

Начало абсолютной системы координат Oxy помещаем в базовую точку старта (см. рис. 1).

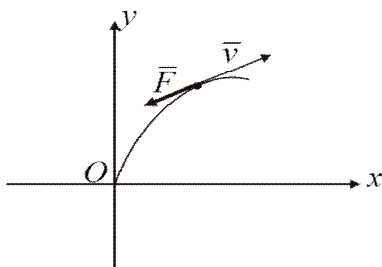


Рис. 1

Уравнения управляемого движения имеют вид [6, 7]

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} &= -k(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} + v_1, & \ddot{x} &= -\frac{k}{m} \dot{x} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} + \frac{1}{m} v_1, \\
 m\ddot{y} &= -k(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \cdot \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} + v_2, & \ddot{y} &= -\frac{k}{m} \dot{y} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} + \frac{1}{m} v_2, \\
 & & t &\in [t_0, T],
 \end{aligned} \tag{1}$$

где t_0 – время начала движения, T – время окончания движения, x, y – координаты точки, m – ее масса, $k = const$ – коэффициент пропорциональности, а $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ – вектор управляющей силы.

Конечное положение $\begin{pmatrix} x_T \\ y_T \end{pmatrix}$ и вектор базовой начальной скорости

$\begin{pmatrix} \frac{x_T}{T-t_0} \\ \frac{y_T}{T-t_0} \end{pmatrix}$ заданы. Конечная скорость точки может быть любой.

Кинематический закон движения должен удовлетворять следующим требованиям. В начальный момент t_0 времени точка

находится в положении $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, близком к началу координат

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, а ее начальная скорость $\begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix}$ близка к базовой начальной

скорости $\begin{pmatrix} \frac{x_T}{T-t_0} \\ \frac{y_T}{T-t_0} \end{pmatrix}$. В конечный момент времени T точка должна

прийти в заданное положение $\begin{pmatrix} x_T \\ y_T \end{pmatrix}$ с произвольной конечной

скоростью. При этом точка не может пересечь границу заданного множества, определяемого неравенством $\varphi(x, y) \leq 0$.

Другими словами, в процессе движения должно выполняться неравенство

$$\varphi(x(t), y(t)) > 0, t \in [t_0, T].$$

Здесь $\varphi: R^2 \rightarrow R^1$ заданная функция, для которой $\varphi(0, 0) > 0$.

Управление точкой осуществляется в классе программных стратегий.

Определение 1. Будем говорить, что управляющий параметр изменяется в соответствие с программной стратегией (программным управлением) на некотором промежутке времени, если он является известной интегрируемой функцией времени на этом промежутке.

Множество всех программных управлений на промежутке $[t_0, T]$ обозначим символом $\Pi[t_0, T]$.

В работе решается следующая задача.

Задача (основная) 1. Определить программное управление $v^0(\cdot) \in \Pi[t_0, T]$, для которого кинематический закон движения точки $x = x^0(t), y = y^0(t), t \in [t_0, T]$, им порожденный, удовлетворял бы условиям

$$\begin{aligned} x^0(t_0) &= x_0, y^0(t_0) = y_0, \dot{x}^0(t_0) = \dot{x}_0, \dot{y}^0(t_0) = \dot{y}_0, \\ x^0(T) &= x_T, y^0(T) = y_T, \varphi(x^0(t), y^0(t)) > 0, t \in [t_0, T], \end{aligned}$$

где величины $x_0 \approx 0, y_0 \approx 0, \dot{x}_0 \approx \frac{x_T}{T-t_0}, \dot{y}_0 \approx \frac{y_T}{T-t_0}$ становятся точно известными только в момент старта.

Для проведения численных экспериментов принимается

$$t_0 = 0 \text{ сек}, T = 10 \text{ сек}, x_T = 3000 \text{ м}, y_T = 250 \text{ м},$$

$$k = 0.45, m = 100 \text{ кг}, \varphi(x, y) = \frac{(x-1500)^2}{1000^2} + \frac{y^2}{500^2} - 1.$$

2. Базовая траектория и базовое программное управление

Базовый закон движения точки

$$x = \hat{x}(t), y = \hat{y}(t), t \in [t_0, T]$$

должен удовлетворять следующим требованиям:

1) траектория базового движения выходит из начала координат $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и заканчивается в заданной конечной точке $\begin{pmatrix} x_T \\ y_T \end{pmatrix}$;

2) начальная скорость точки в базовом движении совпадает с базовой начальной скоростью $\begin{pmatrix} \frac{x_T}{T-t_0} \\ \frac{y_T}{T-t_0} \end{pmatrix}$;

3) траектория базового движения точки не должна пересекаться с препятствием, т. е. $\varphi(\hat{x}(t), \hat{y}(t)) > 0, t \in [t_0, T]$.

Условие 3) реализуем, заставив базовую траекторию проходить через точку $\begin{pmatrix} x_* \\ y_* \end{pmatrix}$, достаточно удаленную от препятствия.

Базовый закон движения точки ищем в виде

$$\hat{x}(t) = \frac{x_T}{T-t_0} \cdot t, \quad \hat{y}(t) = a_0 + a_1 t^1 + a_2 t^2 + a_3 t^3, \quad t \in [t_0, T].$$

Коэффициенты a_0, a_1, a_2, a_3 определяются из условия

$$\hat{y}(t_0) = 0, \quad \dot{\hat{y}}(t_0) = \frac{y_T}{T-t_0}, \quad \hat{y}(T) = y_T, \quad \hat{y}\left(\frac{x_*}{x_T}(T-t_0)\right) = y_*.$$

В численном эксперименте при значениях $x_* = 1200$ м, $y_* = 800$ м было получено $a_0 = 0, a_1 = 25, a_2 = 87512, a_3 = 17524$.

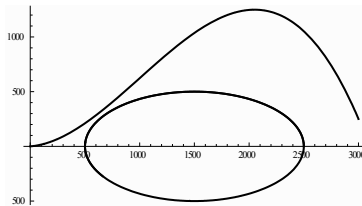


Рис. 2

Из рис. 2 видно, что полученная траектория действительно является базовой.

Для построения базового программного управления уравнения (1) разрешаем относительно управлений

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{k}{m} \dot{x} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} + \frac{1}{m} v_1, \\ \ddot{y} &= -\frac{k}{m} \dot{y} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} + \frac{1}{m} v_2, \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \hat{v}_1(t) &= m\ddot{x}(t) + k\dot{x}(t) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}, \\ \hat{v}_2(t) &= m\ddot{y}(t) + k\dot{y}(t) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}, \end{aligned} \quad t \in [t_0, T].$$

Заметим, что базовое управление порождает базовый закон движения точки, если ее начальные условия являются базовыми начальными условиями. На рис. 3, 4 приведены графики соответственно компонент \hat{v}_1 и \hat{v}_2 этого управления в численном эксперименте.

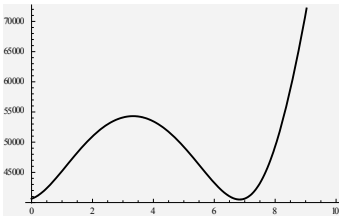


Рис. 3

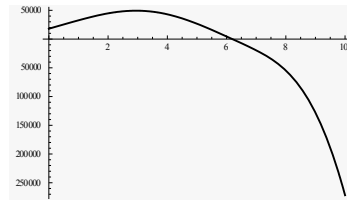


Рис. 4

3. Возмущенное движение и возмущения

Начальные условия точки, реализовавшиеся в действительности в момент старта, будем трактовать как возмущенные по отношению к базовым начальным условиям, а разности

$$\delta x_0 = x_0 - 0, \delta y_0 = y_0 - 0,$$

$$\delta \dot{x}_0 = \frac{x_T}{T - t_0} - \dot{x}_0, \delta \dot{y}_0 = \frac{y_T}{T - t_0} - \dot{y}_0$$

– как их возмущения.

Закон движения точки, отвечающий возмущенным начальным условиям и базовому программному управлению, принимаем за возмущенный закон движения:

$$x = x_{\text{voz}}(t), y = y_{\text{voz}}(t), t \in [t_0, T].$$

Очевидно, что возмущенный закон движения точки не обязан удовлетворять требованиям, сформулированным в **задаче (основной) 1** управления. Это утверждение, как видно из рис. 5, подкреплено численным экспериментом.

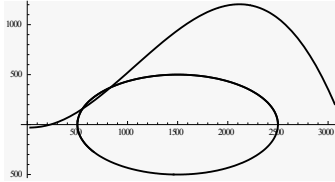


Рис. 5

Здесь траектория возмущенного движения пересекает препятствие и величина $\sqrt{(x_{voz}(T) - x_T)^2 + (y_{voz}(T) - y_T)^2}$, которая характеризует промах по цели в конечный момент времени, равна 120.38 м.

Следовательно, базовое управление для возмущенных начальных условий не может служить решением **задачи 1**.

Разности

$$\begin{aligned} \delta x(t) &= x_{voz}(t) - \hat{x}(t), \quad \delta y(t) = y_{voz}(t) - \hat{y}(t), \\ \delta \dot{x}(t) &= \dot{x}_{voz}(t) - \dot{\hat{x}}(t), \quad \delta \dot{y}(t) = \dot{y}_{voz}(t) - \dot{\hat{y}}(t), \\ & t \in [t_0, T]. \end{aligned}$$

будем называть возмущениями закона движения точки.

Заметим, что динамика возмущений с высокой степенью точности описывается линейной системой дифференциальных уравнений, получающейся в результате линеаризации исходных уравнений динамики в окрестности базового закона движения точки.

4. Вспомогательная задача управления

Решение основной задачи управления для возмущенных начальных условий осуществим введением дополнительных управляющих параметров u_1, u_2 , входящих в дифференциальные уравнения движения точки аддитивно базовым управлениям.

Тогда

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\frac{k}{m} \dot{x} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} + \frac{1}{m}(\hat{v}_1 + u_1), \\ \ddot{y} &= -\frac{k}{m} \dot{y} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} + \frac{1}{m}(\hat{v}_2 + u_2).\end{aligned}\tag{2}$$

Заменой переменных $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = \dot{x}, q_4 = \dot{y}$ нормализуем систему (2)

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= q_3, \\ \dot{q}_2 &= q_4, \\ \dot{q}_3 &= -\frac{k}{m} q_3 \cdot \sqrt{q_3^2 + q_4^2} + \frac{1}{m}(\hat{v}_1 + u_1), \\ \dot{q}_4 &= -\frac{k}{m} q_4 \cdot \sqrt{q_3^2 + q_4^2} + \frac{1}{m}(\hat{v}_2 + u_2)\end{aligned}$$

и линеаризуем ее в окрестности пары "базовое управление, базовое движение". В результате получим

$$\dot{z} = A(t)z + Bu,\tag{3}$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial q_3} \left(-\frac{k}{m} q_3 \cdot \sqrt{q_3^2 + q_4^2} \right) & \frac{\partial}{\partial q_4} \left(-\frac{k}{m} q_3 \cdot \sqrt{q_3^2 + q_4^2} \right) \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial q_3} \left(-\frac{k}{m} q_4 \cdot \sqrt{q_3^2 + q_4^2} \right) & \frac{\partial}{\partial q_4} \left(-\frac{k}{m} q_4 \cdot \sqrt{q_3^2 + q_4^2} \right) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}q_1 &= \hat{q}_1(t) \\ q_2 &= \hat{q}_2(t) \\ q_3 &= \hat{q}_3(t) \\ q_4 &= \hat{q}_4(t)\end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{pmatrix}.$$

Дополнительным управлением $u(\cdot)$ следует распорядиться так, чтобы для некоторого момента времени $T_1 \in [t_0, T]$ решение $z^0(\cdot)$ системы (3) с начальными условиями

$$z_1(t_0) = \delta x_0, z_2(t_0) = \delta y_0, z_3(t_0) = \delta \dot{x}_0, z_4(t_0) = \delta \dot{y}_0$$

обратилось в ноль.

В численном эксперименте было принято $T_1 = 3 \text{ сек}$.

В момент времени $T_1 \in [t_0, T]$ происходит совпадение фазовых векторов возмущенного и базового движений. После отключения (обнуления) дополнительного управления дальнейший закон движения точки в силу теоремы существования и единственности решения системы дифференциальных уравнений совпадет с базовым законом движения, что обеспечит решение **задачи 1**.

Условие обнуления возмущений в момент времени $T_1 \in [t_0, T]$ дополним требованием минимизации затрат на реализацию управления $u(\cdot)$, обеспечивающего это обнуление.

В результате приходим к следующей задаче теории оптимального управления для линейного динамического объекта (3).

Задача (вспомогательная) 2. Найти программное управление $u^0(\cdot) \in \Pi[t_0, T_1]$, для которого

$$z^0(T_1) = 0, \quad z^0(\cdot) = z(\cdot, z(t_0), u^0(\cdot)) \quad (4)$$

и для всех управлений $u(\cdot) \in \Pi[t_0, T_1]$, удовлетворяющих условию (4), выполнялось бы неравенство

$$\left[\int_{t_0}^{T_1} (u_1^{02}(\tau) + u_2^{02}(\tau)) d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\int_{t_0}^{T_1} (u_1^2(\tau) + u_2^2(\tau)) d\tau \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Решение **задачи (вспомогательной) 2** производится методом моментов на основе принципа максимина Н.Н. Красовского [1]. Приведем в кратце алгоритм решения **задачи 2** [2].

Строится матрица перехода $H[t_0, t]$ и вектор констант b по формулам

$$\begin{aligned}
 H[t_0, t] &= Z[t_0, t]B = \\
 &= \begin{pmatrix} h^{(1)}(t) \\ \dots \\ h^{(4)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1^{(1)}(t) & h_2^{(1)}(t) \\ \dots & \dots \\ h_1^{(4)}(t) & h_2^{(4)}(t) \end{pmatrix}, t \in [t_0, T_1], \\
 \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_4 \end{pmatrix} &= -Z[t_*, t_0] \begin{pmatrix} z_1(t_0) \\ \dots \\ z_4(t_0) \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

где

$$X[t, \tau] = \begin{pmatrix} x_{11}(t, \tau) & \dots & x_{14}(t, \tau) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{41}(t, \tau) & \dots & x_{44}(t, \tau) \end{pmatrix}, \quad t, \tau \in [t_0, T_1]$$

– фундаментальная матрица Коши для однородного уравнения

$$\dot{z} = A(t)z.$$

Вычисляется матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{14} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{41} & \dots & a_{11} \end{pmatrix},$$

$$a_{ij} = \int_{t_0}^{T_1} \langle h^{(i)}(t), h^{(j)}(t) \rangle d\tau, \quad i, j = 1, \dots, 4.$$

Далее составляется система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{14} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{41} & \dots & a_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \dots \\ \mu_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_4 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mu_1^0, \mu_2^0, \mu_3^0, \mu_4^0$ – ее решение. Программное управление, решающее задачу (вспомогательную) 2, имеет вид:

$$u^0(t) = \sum_{i=1}^4 \mu_i^0 h^{(i)}(t), \quad t \in [t_0, T_1].$$

5. Решение основной задачи 1

Программное управление, решающее задачу (основную) 1 имеет вид

$$\begin{pmatrix} v_1^{kor}(t) \\ v_2^{kor}(t) \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \hat{v}_1(t) \\ \hat{v}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1^0(t) \\ u_2^0(t) \end{pmatrix}, & t \in [t_0, T_1] \\ \begin{pmatrix} \hat{v}_1(t) \\ \hat{v}_2(t) \end{pmatrix}, & t \in (T_1, T] \end{cases}.$$

На рис. 6, 7 приведены графики соответственно компонент v_1^{kor} и v_2^{kor} этого управления в численном эксперименте.

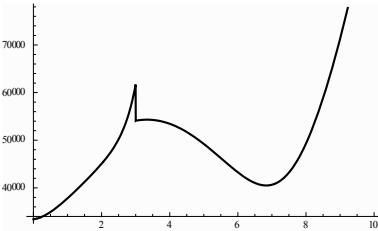


Рис. 6

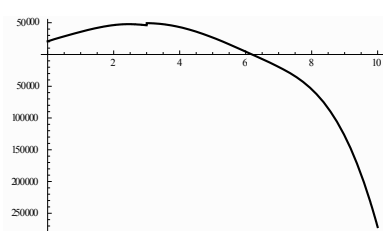


Рис. 7

Обозначим $x_{kor}(t), y_{kor}(t), t \in [t_0, T]$ – решение системы дифференциальных уравнений

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m} \dot{x} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} + \frac{1}{m} v_1^{kor}(t),$$

$$\ddot{y} = -\frac{k}{m} \dot{y} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} + \frac{1}{m} v_2^{kor}(t)$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0.$$

Данное решение отождествим с откорректированным возмущенным движением точки, которое будет удовлетворять всем требованиям **задачи (основной) 1**.

Этот факт подтверждает и численный эксперимент. Его результат иллюстрирует рис. 8, на котором показаны траектории базового и откорректированного движений.

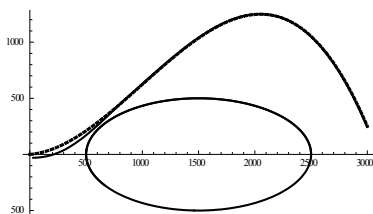


Рис. 8

Из рисунка видно, что в момент времени $T_1 \in [t_0, T]$ траектория откорректированного движения выходит на траекторию базового движения и в дальнейшем с ней совпадает.

Заметим, что промах по цели в откорректированном движении составляет $0.58 м$, что значительно меньше промаха в возмущенном движении ($120.38 м$).

Библиографический список

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
2. Лутманов С.В. Вариационное исчисление и теория оптимального управления в примерах и упражнениях: учеб. пособие. Перм. ун-т. Пермь, 2010. 200 с.
3. Лутманов С.В. Об одной методике исследования управляемой динамической системы лиц // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 1(36). С.13–20.
4. Кучкова Т.Ю., Лутманов С.В. Задачи управления одной динамической системой с тремя степенями свободы // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. Пермь, 2017. Вып. 49. С. 25–36.

5. Лутманов С.В., Овчинников В.А. Оптимальная коррекция движения твердого тела, вращающегося относительно неподвижной точки // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. Пермь, 2017. Вып. 49. С. 37–50.

6. Лутманов С.В. Хотько О.А. Об одной задаче управления тяжелой точкой, движущейся в среде с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости. // Вестник Пермского университета. Математика, Механика. Информатика. 2018. Вып. 3(42). С. 69–75.

7. Лутманов С.В. Хотько О.А. Оптимальная коррекция полета тяжелой материальной точки в среде с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. Пермь, 2018. Вып. 50. С. 33–45.

8. Лутманов С.В. Коррекция движения управляемого динамического объекта в условиях воздействия на него неконтролируемой помехи // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 1(44). С. 14–21.