ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ
Нелинейные динамические системы

Вып. 51 **Межвузовский сборник научных трудов** **2019**

УДК 531.381; 531.355

Н.Н. Макеев
Институт проблем точной механики
и управления РАН
Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, 24
nmakeyev@mail.ru; (845) 272-35-33

АДИАБАТИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ ГИРОСТАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассматривается задача о нахождении адиабатических инвариантов динамической системы свободного от связей гиростата, движущегося относительно центра масс в стационарном магнитном поле. Гиростат обладает осевой структурно-динамической симметрией, постоянными гиростатическим и магнитным моментами. Приводится пример применения инвариантов при исследовании воздействия на гиростат силовых возмущений.

Ключевые слова: адиабатический инвариант; динамическая система; гиростат; магнитное поле.

1. Предварительные положения

Под *адиабатическим инвариантом* (АИ) понимается функция амплитуды и фазы *динамической системы* (ДС), изменяющаяся намного медленнее, чем параметры данной системы [1, с. 168].

Строгое определение понятия АИ приведено в источниках [2, с. 228; 3] и является в литературе общепринятым.

Для формализованного описания свойств нелинейной ДС теория АИ является одним из эффективных и широко применяемых инструментов исследования, позволяющим получать необходимые характеристики этих систем, минуя ее интегрирование [1]. Кроме того, АИ является основным базовым элементом, применяемым в асимптотических методах исследования детерминированных эволюционных динамических систем.

Рассмотрим структурную модель исследуемого объекта – гиростата. Свободный от связей гиростат движется относительно центра масс (полюса *C*) в магнитном поле (МП), порожденном прямым магнитным диполем. Предполагается, что МП является стационарным и однородным с постоянным вектором напряженности **H**, неизменно ориентированным относительно заданного инерциального координатного ортобазиса $Z\,(Cz_1z_2z_3)$.

Введем главный центральный координатный ортобазис $X\,(Cx_1x_2x_3)$, ориентация которого относительно базиса *Z* задается вектором углов Эйлера $\mathbf{\Phi} = [\theta, \varphi, \psi]^T$. Гиростат обладает заданным постоянным относительно базиса *X* гиростатическим моментом $\mathbf{k}\,(k_1, k_2, k_3)$. Предполагается, что с носителем гиростата неизменно связана система ферромагнетиков (постоянных магнитов) с неизменным результирующим магнитным моментом $\mathbf{I_0}\,(0, 0, I_0\upsilon_0)$, где υ_0 – косинус угла между вектором $\mathbf{I_0}$ и осью Cx_3.

Носитель гиростата может намагничиваться, порождая магнитный момент **I**, в силу чего собственный магнитный момент гиростата слагается из компонент $\mathbf{I}_0$, **I**. При этом влиянием вихревых токов (токов Фуко) и явлением гистерезиса пренебрегаем. Эта структурная модель с определенной точностью аппроксимирует геомагнитное поле в задаче о движении относительно центра масс намагниченного ИСЗ [4, с. 28].

Пусть $\mathbf{s}\,(s_1, s_2, s_3)$ − орт силовых линий МП, где

$$(s_1, s_2, s_3) = (\sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \cos\theta) \quad (0 \le \theta \le \pi). \quad (1)$$

Тогда, согласно (1), имеем [5]

$$\mathbf{I} = m_2 H^{-1} s_3\, \mathbf{e}_3 . \quad (2)$$

В равенстве (2) обозначено: $H = |\mathbf{H}| = const \neq 0$, $\mathbf{e}_3$ – орт оси Cx_3, m_2 – постоянный параметр, зависящий от магнитной проницаемости [6] носителя гиростата по оси Cx_3 и от некоторой характерной постоянной МП.

Наряду с параметром m_2 введем постоянный параметр m_1 и положим [5]

$$m_1 = I_0 \upsilon_0 H, \qquad Q(s_3) = m_1 + m_2 s_3, \tag{3}$$

где $Q(s_3)$ − заданная позиционная функция задачи, и пусть $\mathbf{A} = diag\,(A_1, A_2, A_3)$ − матрица центрального тензора инерции гиростата; $\boldsymbol{\omega}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ − абсолютная угловая скорость его носителя. Здесь и всюду далее все координатные элементы отнесены к координатным осям базиса *X*.

2. Основные предпосылки

Движение гиростата относительно центра масс в МП под воздействием возмущающего $\varepsilon\mathbf{L}(\varepsilon L_1, \varepsilon L_2, \varepsilon L_3)$ и стабилизирующего $\mathbf{L}^M(L_1^M, L_2^M, L_3^M)$ силовых моментов определяется динамической системой (ДС)

$$\begin{gathered} \mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}) + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}) = \varepsilon\,\mathbf{L} + \mathbf{L}^M, \\ \dot{\boldsymbol{\Phi}} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\omega}, \theta, \varphi), \end{gathered} \tag{4}$$

где $\boldsymbol{\Phi}$ − вектор углов Эйлера; θ, φ − углы нутации и собственного вращения, соответственно. Здесь $0 < \varepsilon << 1$ − безразмерный малый параметр, а момент $\mathbf{L}^M$ является результирующим силовым моментом МП, компоненты которого $(j = 1, 2, 3)$ определяются равенством [7]

$$\left[L_j^M\right]^T = Q(s_3)[-s_2, s_1, 0]^T. \tag{5}$$

Второе равенство (4) соответствует системе кинематических уравнений Эйлера. Примем структурно-динамические условия

$$A_1 = A_2, \quad k_1 = k_2 = 0, \quad k_3 = k = \text{const}, \tag{6}$$

выражающие кинетическую симметрию гиростата относительно оси Cx_3, и обозначим

$$\omega = \omega_1 + i\omega_2, \quad L = L_1 + iL_2, \quad N(\omega_3) = (A_3 - A_1)\omega_3 + k,$$

где i − мнимая единица.

Представляя систему уравнений (4) в проекциях на оси координатного базиса X и выделяя из нее подсистему динамических уравнений, представим ее в заданных обозначениях в виде

$$\begin{gathered} A_1\dot{\omega} - iN(\omega_3)\omega + Q(\theta)\sin\theta\exp(-i\varphi) = \varepsilon L, \\ A_3\dot{\omega}_3 = \varepsilon L_3 \quad (0 < \theta < \pi). \end{gathered} \tag{7}$$

При $\varepsilon = 0$ (базовое или нулевое приближение) система уравнений (7) обладает независимыми первыми алгебраическими интегралами

$$\begin{gathered} J_1 \equiv A_1[|\omega|^2 + a_0(\omega_3^0)^2] + 2m_1 u + m_2 u^2 = 2h_1, \\ J_2 \equiv A_1\sqrt{1-u^2}\,\mathrm{Im}[\omega\exp(i\varphi)] + G_3^0 u = h_2, \end{gathered} \tag{8}$$

где обозначено

$$u = \cos\theta, \quad a_0 = A_1^{-1}A_3, \quad G_3^0 = A_3\omega_3^0 + k,$$

h_1, h_2 − постоянные интегрирования. Здесь и всюду далее верхний нулевой индекс относится к значениям величин при $t = 0$.

Из системы интегралов (8) и кинематических уравнений Эйлера следует определяющее для функции $u\,(t)$ уравнение

$$\dot{u}^2 = P(u), \tag{9}$$

где обозначено

$$P(u) = A_1^{-1}\left[(a_1 - 2m_1 u - m_2 u^2)(1 - u^2) - A_1^{-1}(h_2 - G_3^0 u)^2\right],$$

$$a_1 = 2h_1 - A_3(\omega_3^0)^2.$$

3. Аналитические представления инвариантов

Получим аналитические выражения для АИ движения гиростата в МП, подчиняющихся ДС (7). Поставим следующую задачу.

Задача: найти адиабатические инвариантные соотношения для ДС (7), представленные как функции класса $C^1[\theta_1, \theta_2]$, определенные в замкнутом интервале, ограниченном заданными амплитудными значениями θ_1, θ_2 ($\theta_1 < \theta_2$) угла нутации θ. □

Представим АИ для системы уравнений (7) в виде

$$I = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \dot{\theta}\, d\theta = \int_{u_1}^{u_2} \frac{\dot{u}\, du}{1-u^2}, \tag{10}$$

где величины u_1, u_2 соответствуют амплитудным значениям ($u_j = \cos\theta_j$, $j = 1, 2$), при которых $\dot{u} = 0$.

В силу уравнения (9) для АИ (10) имеем

$$I = \int_{u_1}^{u_2} (1-u^2)^{-1} \sqrt{P(u)}\, du, \tag{11}$$

где основной полином (*гиростатическая функция*)

$$P(u) = A_1^{-1}[m_2 u^4 + 2m_1 u^3 + (a_2 - a_1)u^2 + 2a_3 u + a_4],$$
$$a_2 = -[m_2 + A_1^{-1}(G_3^0)^2], \qquad a_3 = -m_1 + A_1^{-1} h_2 G_3^0, \tag{12}$$
$$a_4 = a_1 - A_1^{-1} h_2^2.$$

Выражение для АИ (11) определяется типом корней полинома P. В общем случае здесь имеются два различных действительных корня, соответствующих пограничным значениям u_1, u_2, для которых $[u_1, u_2] \subset [-1, 1]$. Остальные два корня − либо действительные, либо комплексные вида $(u_3 \mp i\nu), (u_4 \mp i\nu)$. В первом случае примем $(-u_3) > u_4$ при $m_2 < 0$ и $(-u_3) < u_4$ при $m_2 > 0$.

Пусть гиростат совершает *плоское движение*, при котором

$$\omega_3^0 = 0, \qquad k = h_2 = 0. \tag{13}$$

Если при этом все корни полинома P действительные простые, то для АИ (11) имеем

$$I_1 = A_1^{-1} C[c_1 \mathrm{K}(k_0) + c_2 \mathrm{E}(k_0) + c_3 \Pi(n_0, k_0)]. \tag{14}$$

Здесь: $\mathrm{K}, \mathrm{E}, \Pi$ – символы полных эллиптических интегралов первого, второго и третьего рода, соответственно [8]; параметр

$$k_0 = \left[\frac{(u_2 - u_1)(u_3 - u_4)}{(u_2 - u_4)(u_3 - u_1)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

− модуль указанных эллиптических интегралов;

$$n_0 = (u_2 - u_1)(u_1 - u_3)^{-1}$$

− параметр эллиптического интеграла третьего рода;

$$C = 4[A_1^{-1} m_2 (u_3 - u_1)(u_2 - u_4)]^{-\frac{1}{2}},$$

$$c_1 = h_1 - m_1 u_3 - \frac{1}{2} m_2 v_1, \quad c_2 = -\frac{1}{2} m_2 v_2,$$

$$c_3 = -m_1 b_1 - \frac{1}{2} m_2 v_3, \qquad b_1 = u_2 - u_3,$$

$$v_1 = u_3^2 - \sigma_0, \qquad \sigma_0 = [2(n_0 + 1)]^{-1} b_1^2,$$

$$v_2 = n_0 \sigma_0 D^{-1}, \qquad D = n_0 + k_0^2,$$

$$v_3 = 2 b_1 u_3 + v_2 \left[D + 2 + (1 + 3n_0^{-1})\, k_0^2\right].$$

В случае, при котором в плоском движении гиростата существуют два действительных и два комплексных корня полинома P, выражение для АИ (11) имеет вид

$$I_2 = A_1^{-1} C [c_4 \mathrm{K}(k_0) + c_5 \mathrm{E}(k_0) + c_6 \Pi(n_0, k_0)], \tag{15}$$

где обозначено

$$c_4 = h_1 - m_1 \lambda_0 - \frac{1}{2} m_2 v_4, \quad c_5 = -\frac{1}{2} m_2 v_5,$$

$$c_6 = -(m_1 b_2 + \frac{1}{2} m_2 v_6), \quad \lambda_0 = w u_1 - u_2,$$

$$k_0^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{w_1}{w_2}\right), \quad n_0 = w^{-1}[0.5(w-1)]^2,$$

$$w = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \quad w_1 = (u_1 - u)(u_2 - u) + v^2,$$

$$w_2 = \sigma_1 \sigma_2, \quad \sigma_j = \sqrt{(u_j - u)^2 + v^2} \quad (j = 1, 2),$$

$$C = \frac{4}{\sqrt{A_1^{-1} m_2 w_2}}, \quad b_2 = \frac{2(n_0 + 1) w}{w^2 - 1}(u_2 - u_1),$$

$$v_4 = \lambda_0^2 - v_0, \; v_5 = n_0 v_0 D^{-1}, \; v_0 = (1 + n_0)^{-1} b_2^2,$$

$$v_6 = [(1 + D^{-1} k_0^2) b_2 + 2\lambda_0] b_2.$$

Положим, что гиростат совершает *пространственное движение.* Тогда, если все корни полинома P действительные и простые, АИ (11) представляется равенством

$$I_3 = I_1 - \frac{1}{2}[c_7 \mathrm{K}(k_0) + \sum_{j=1}^{2} \ell_j \Pi(e_j, k_0)], \tag{16}$$

$$c_7 = \delta_1 \nu_1 + \delta_2 \nu_2, \quad \ell_j = \delta_j (q_j - \nu_j) \quad (j = 1, 2),$$

$$(\delta_1, \delta_2) = \frac{1}{2}(\omega_3^0 \mp A_1^{-1} h_2)^2, \quad (q_1, q_2) = (1 \mp u_2)^{-1},$$

$$(\nu_1, \nu_2) = (1 \mp u_3)^{-1}, \qquad u_i \neq 1 \qquad (i = 2, 3),$$

$$(e_1, e_2) = n_0 (1 \mp u_3)(1 \mp u_2)^{-1},$$

а I_1 определяется равенством (14).

Если для полинома P существуют два действительных простых и два комплексных корня, то АИ (11) представляется выражением

$$I_4 = I_2 - \frac{1}{2}\left[c_7 \mathrm{K}(k_0) + (1 + n_0)\sum_{j=1}^{2} \delta_j q_j \Pi(e_j, k_0)\right], \tag{17}$$

где величина I_2 определяется равенством (15). При этом в равенстве (17) для параметра c_7 имеем

$$(\nu_1, \nu_2) = (w - 1)(w\beta_{12} - \beta_{34})^{-1}, \ (\beta_1, \beta_2) = \beta_{12} = 1 \mp u_1,$$

$$(\beta_3, \beta_4) = \beta_{34} = 1 \mp u_2,$$

$$(e_1, e_2) = (4w\beta_{12}\beta_{34})^{-1}(w\beta_{12} - \beta_{34})^2,$$

$$(q_1, q_2) = (w + 1)(w\beta_{12} + \beta_{34})^{-1} - (\nu_1, \nu_2).$$

Таким образом, для движения гиростата, подчиняющегося ДС (4), (5), при ограничениях (6) имеют место АИ (14)−(15) и (16)−(17), относящиеся к его плоскому и пространственному движениям, соответственно.

4. Адиабатические инварианты с ограничениями

Рассмотрим некоторые частные случаи найденных выражений для АИ. Для случая *плоского движения* гиростата введем ограничение, относящееся к параметрам величины I_1

$$4(1 + n_0) DN(u_3) - n_0 m_2 [2 + D + (1 + 3n_0^{-1}) k_0^2] b_1 = 0,$$

и пусть $(-u_3) = u_4 + \varepsilon_1$ или $u_2 = u_1 + \varepsilon_2$, где $(|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|) << 1$. Предположим далее, что $\varepsilon_1 > 0$ при $m_2 < 0$ и $\varepsilon_1 < 0$ при $m_2 > 0$.

Допущение о достаточной близости действительных корней u_3, u_4 или u_1, u_2 реализуется для малых значений модуля k_0. Это позволяет использовать аналитические разложения эллиптических интегралов K, E в ряды по степеням малого параметра k_0 в окрестности значения $k_0 = 0$ [8]. Применяя эти разложения, из соотношения (14) в пределе при $k_0 \to 0$ получаем

$$I_1 = (4A_1)^{-1} \pi C (2h_1 - 2m_1 u_3 - m_2 u_3^2).$$

Пусть при *плоском движении* гиростата выполняется ограничение, налагаемое на параметры АИ I_2

$$2D(m_1 + m_2 \lambda_0) + m_2 (D + k_0^2) b_2 = 0. \tag{18}$$

Полагая $0 < \varepsilon_3 << 1$ и вводя дополнительное условие

$$q_0^2 \equiv (u_1 - u_2)^2 \nu^2 = 4 w_1 \varepsilon_3 , \tag{19}$$

где $w_1 > 0$, в линейном по ε_3 приближении находим

$$w_1 = w_2 - 2\varepsilon_3 , \quad k_0 = \sqrt{\varepsilon_3 w_2^{-1}} \quad (w_2 > 0).$$

В силу этого в линейном по ε_3 приближении присоединим к условию (19) ограничение

$$q_0^2 = 4 w_2 \varepsilon_3 \qquad (w_2 > 0). \tag{20}$$

Используя разложения эллиптических интегралов K, E в ряды по степеням малого параметра k_0 в окрестности его нуля при условиях (18)−(20), из выражения (15) получаем

$$I_2 = (16 A_1)^{-1} \pi C [(2h_1 - 2m_1 \lambda_0 - m_2 \nu_4)(k_0^2 + 4) +$$
$$+ m_2 \nu_5 (k_0^2 - 4)] + \mathrm{O}(k_0^4),$$

где O − символ порядка величины.

Положим, что характеристики магнитной проницаемости корпуса гиростата и параметры МП таковы, что

$$m_2 = 0. \tag{21}$$

Тогда гиростатическая функция $P(u)$ в силу условия (21) вырождается в полином

$$R(u) = A_1^{-1} [(a_1 - 2m_1 u)(1 - u^2) - A_1^{-1} (h_2 - G_3^0 u)^2]$$

и АИ (11) определяется равенством

$$I = \int_{u_1}^{u_2} (1-u^2)^{-1} \sqrt{R(u)}\, du. \tag{22}$$

В этом случае движение гиростата реализуется при условии, что все корни полинома R действительные. Для дальнейшего положим $u_1 > u_2 > u_3$ при $m_1 < 0$ и $u_1 < u_2 < u_3$ при $m_1 > 0$.

При *плоском движении* гиростата и условиях (13) для АИ (22) имеем определяющее соотношение

$$I_1 = A_1^{-1} C[(h_1 - m_1 u_3)\,\mathrm{K}(k_0) - m_1 b_1 \mathrm{E}(k_0)], \tag{23}$$

где обозначено

$$k_0 = \sqrt{b_1^{-1}(u_1 - u_2)}. \quad C = \frac{4}{\sqrt{-2A_1^{-1} m_1 b_1}}, \quad b_1 = u_1 - u_3.$$

Если $h_1 > |m_1|$, то в случае плоского движения гиростата равенство (23) принимает вид

$$I_1 = 2A_1^{-1}\,\mathrm{E}(k_0)\sqrt{2(h_1 + |m_1|)}. \tag{24}$$

В режиме плоских колебаний гиростата в МП при условии $h_1 < |m_1|$ АИ (23) определяется выражением

$$I_1 = 2A_1^{-1}\sqrt{|m_1|}\,[(h_1 - |m_1|)\mathrm{K}(k_0) + 2|m_1|\,\mathrm{E}(k_0)]. \tag{25}$$

Для *пространственного движения* при условии (21) АИ (22) принимает вид

$$I_3 = I_1 - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} \delta_j \nu_j\, \Pi(e_j, k_0). \tag{26}$$

В равенстве (26) обозначено

$$(\nu_1, \nu_2) = (1 \mp u_1)^{-1}, \quad (e_1, e_2) = (u_2 - u_1)(u_1 \mp 1),$$

причем величины δ_j, k_0 выражаются соотношениями, относящимися к формулам (16), (23), соответственно, а АИ I_1 определяется одним из равенств (24), (25).

5. Применение аналитического представления

Приведем пример применения полученного АИ. Положим, что помимо **L**-возмущений ДС (4) получает возмущения в силу медленного изменения во времени характерных магнитных параметров m_1, m_2, происходящих за достаточно большой промежуток времени $t \in [0, 1/\varepsilon] \equiv T$, где $0 < \varepsilon << 1$.

Пусть $\tau = \varepsilon t$. В возмущенном (при $\varepsilon \neq 0$) движении полагаем $m_j = m_j(\tau)$, а в невозмущенном (при $\varepsilon = 0$) $m_j = \mathrm{const}$, где $j = 1, 2$. Предполагается, что $\mathbf{L} = 0$ и возмущения ДС (4) порождаются только медленным изменением параметров m_1, m_2. Как известно [3], для таких ДС АИ сохраняется в широком классе заданных начальных значений.

Обозначим I аналитическое выражение АИ вида (11) для заданной невозмущенной ДС; J_1, J_2 − выражения для первых интегралов (8) данной системы. Тогда для возмущенной ДС в линейном по ε приближении имеем

$$[J_1(\tau), J_2(\tau)] = (J_1, J_2) + \mathrm{O}(\varepsilon),$$

$$P(u, \tau) = P(u) + \mathrm{O}(\varepsilon),$$

где полином $P(u)$ определяется выражением (12). В силу этого для возмущенного движения на отрезке времени T имеем

$$I(\tau) = I_0 + W(u_1, u_2, \omega_3^0) + \mathrm{O}(\varepsilon). \tag{27}$$

В равенстве (27): $I_0 = \mathrm{const}$ − интеграл порождающей (при $\varepsilon = 0$) исходной ДС, определяемый выражениями (11), (12);

$$W(u_1, u_2, \omega_3^0) = \frac{1}{2}\int_{u_1}^{u_2} [(1 - u^2)\sqrt{P(u)}\,]^{-1} du.$$

Величина W выражается через полные эллиптические интегралы первого и третьего рода [8].

Рассмотрим случай, при котором корни полинома P все действительные и простые, причем

$$u_1 > u \geq u_2 > u_3 > u_4 \tag{28}$$

и введем интеграл с действительным параметром $p \neq (u_1, u_4)$

$$F(p) = \int_{u_1}^{u_2} [(p - u)\sqrt{P(u)}\,]^{-1} du,$$

определяемый в силу условий (28) выражением [9]

$$F(p) = 2\frac{(u_1 - p)\mathrm{K}(k_0) - (u_1 - u_4)\Pi(n_0, k_0)}{(p - u_1)(p - u_4)\sqrt{(u_1 - u_3)(u_2 - u_4)}}. \tag{29}$$

В равенстве (29) обозначено

$$n_0 = (u_2 - u_1)(p - u_4)[(u_2 - u_4)(p - u_1)]^{-1},$$

а параметр k_0 определен выше равенством, относящимся к соотношению (14). Согласно выражению (29) получаем

$$W(u_1, u_2, \omega_3^0) = \frac{1}{4}[F(1) - F(-1)]. \tag{30}$$

Таким образом, накопление возмущений при изменении величины АИ $I(\tau)$ за отрезок времени T согласно равенству (27) происходит пропорционально значению величины W, определяемой соотношениями (29), (30).

Заключение

Задача о движении кинетически осесимметричного гиростата в стационарном магнитном поле, рассмотренная здесь в ограниченной постановке, логически связана с общей фундаментальной проблемой движения твердого тела в силовых полях негравитационной природы.

Эффективным аналитическим инструментом исследования инвариантных динамических свойств уравнений движения механических объектов являются АИ, отражающие качественные характеристики их состояния.

Форма представления АИ вида (10) приведена в книге [10] и удобна для применения при наличии зависимости вида $\dot{\theta}(\theta)$.

В возмущенном движении при изменении величин параметров m_1, m_2 (что возможно в случае изменения во времени магнитных свойств объекта) происходит эволюция фазовых траекторий ДС, сопровождающаяся качественными изменениями характера движения гиростата. Это выражается в переходе вращательного движения в колебательное с последующими изменениями их амплитудных характеристик и переходом фазовой точки через сепаратрису в другую область фазовой плоскости.

Как известно [11], условие для АИ вида I = const имеет место для широкого спектра начальных значений с точностью до порядка $\mathrm{O}(\varepsilon \ln \varepsilon)$ на интервале времени $\mathrm{O}(\varepsilon^{-1})$.

Особое (сингулярное) множество начальных условий, для которых данная оценка несправедлива, имеет меру $\mathrm{O}(\varepsilon^n)$, где $n \geq 1$ – любое натуральное число.

Библиографический список

1. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969. 379 с.

2. *Джакалья Г.Е.* Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 319 с.

3. *Арнольд В.И. и др.* Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники / Современные проблемы математики: Фундаментальные направления. Т.3. М.: ВИНИТИ, 1985. 304 с.

4. *Белецкий В.В., Хентов А.А.* Вращательное движение намагниченного спутника. М.: Наука, 1985. 288 с.

5. *Макеев Н.Н.* Интегрируемость гиростатических систем в магнитном поле // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. Пермь, 2003. Вып. 35. С. 49−70.

6. *Вонсовский С.В.* Магнетизм. М.: Наука, 1971. 1032 с.

7. *Макеев Н.Н.* Устойчивость регулярной прецессии гиростата-магнетика в магнитном поле // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2014. Вып. 2(25). С. 38−46.

8. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: в 3 т. М.: Наука. Т. 3, 1967. 300 с.

9. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа: в 2 ч. М.: Физматгиз. Ч. 2. 1963. 516 с.

10. *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Метод усреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во Московского ун-та, 1971. 507 с.

11. *Нейштадт А.И.* Об изменении адиабатического инварианта при переходе через сепаратрису // Физика плазмы. 1986. Т.12. Вып. 8. С. 992−1001.