ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ
Нелинейные динамические системы

Вып. 51 **Межвузовский сборник научных трудов** **2019**

УДК 531.381:534.013

Н. Н. Макеев
Институт проблем точной механики
и управления РАН
Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, 24
nmakeyev@mail.ru; (845) 272-35-33

РЕЗОНАНСНАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ГИРОСТАТА, ДВИЖУЩЕГОСЯ В ПОЛЕ СИЛ СВЕТОВОГО ДАВЛЕНИЯ

Приводится задача о сферическом движении гиростата с постоянным гиростатическим моментом в поле сил светового давления. В этой задаче рассматриваются малые движения носителя гиростата в окрестности положения его устойчивого равновесия и случаи возникновения кратных резонансов в линейной динамической подсистеме, порожденной исходными уравнениями движения гиростата.

Ключевые слова: гиростат; резонанс; динамическая система; термомеханическая модель; световое давление.

1. Предварительные замечания

Фундаментальный труд А. Пуанкаре "*Лекции по небесной механике*" (т. 2) [1] содержит описания ряда проблем, среди которых важнейшее место занимает *проблема резонансов* (в нелинейном смысле), основанная на классической резонансной модели. В последние годы эта модель применяется в некоторых задачах динамики твердого тела, движущегося вокруг неподвижного полюса, в виде модельной *осцилляторной аналогии*, при которой сферическому движению твердого тела однозначно сопоставляются линейные колебания системы трех осцилляторов, находящихся в пространстве состояний на упругих стационарных удерживающих связях [2].

Несмотря на то, что резонанс в линейных физических системах в идеальной форме практически не реализуется, тем не менее, сама резонансная аппроксимирующая модель является эффективным инструментом исследования свойств движения механических объектов, связанных с этой моделью динамическими аналогиями. Это актуально, в частности, в задачах динамики твердых тел в негравитационных силовых полях, поставленных с учетом термофизических явлений, происходящих в окружающей среде.

2. Основные предпосылки

В динамически активных средах могут проявляться воздействия негравитационных силовых полей. К такого рода полям относится *поле сил светового давления* (*СД-поле*), порождающим фактором которого является источник светового излучения. Этот источник генерирует световую волну, взаимодействующую со средой ее распространения и вызывающую эффект светового давления.

Рассматривается движение в СД-поле свободного от связей гиростата с заданным постоянным результирующим гиростатическим моментом. Гиростат движется так, что его неизменяемая часть (*тело-носитель*) движется вокруг неподвижного полюса O, неизменно связанного с инерциальным пространством. С телом-носителем гиростата неизменно связан *светоотражающий экран* в виде тонкой недеформируемой оболочки неизменной конфигурации с заданными постоянными термомеханическими параметрами. На активную сторону экрана падает однородный световой поток в виде пучка параллельных световых лучей постоянной мощности.

Введем правые координатные ортобазисы с общим началом в полюсе O: базис $Z(Oz_1z_2z_3)$, неизменно связанный с инерциальным конфигурационным пространством, и ортогональный базис $X(Ox_1x_2x_3)$, оси которого направлены по главным в полюсе O направлениям тензора инерции гиростата.

Пусть $\mathbf{s}$ (s_1, s_2, s_3) − *гелиоцентрический орт*, устанавливающий ориентацию светового потока относительно связанного базиса. Этот вектор является *направляющим ортом* светового потока, ориентированным против направления падающего на экран пучка параллельных лучей света.

При определенных ограничениях, принятых для неклассической термомеханической модели [3], СД-поле является консервативным, стационарным и не содержащим особенностей.

Обозначим: $\mathbf{A} = diag(A_1, A_2, A_3)$ − матрица тензора инерции гиростата, заданная в полюсе O; A_j (j = 1, 2, 3) − собственные значения оператора инерции гиростата; $\boldsymbol{\omega}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ − абсолютная угловая скорость носителя гиростата; $\mathbf{k}(k_1, k_2, k_3)$ − постоянный гиростатический момент, заданный в ортобазисе X.

Движение гиростата в однородном параллельном СД-поле рассматривается на основе термомеханической модели взаимодействия светового потока с твердой поверхностью, учитывающей эффект переизлучения (в тепловом диапазоне) мощности, поглощаемой твердой поверхностью [3]. Этой модели соответствует система уравнений [4]

$$\begin{aligned} A_1\dot{\omega}_1 &= (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + k_2\omega_3 - k_3\omega_2 - \\ &\quad - G(s_3)s_2, \\ A_2\dot{\omega}_2 &= (A_3 - A_1)\omega_3\omega_1 + k_3\omega_1 - k_1\omega_3 + \\ &\quad + G(s_3)s_1, \\ A_3\dot{\omega}_3 &= (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + k_1\omega_2 - k_2\omega_1, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\dot{s}_1 = \omega_3 s_2 - \omega_2 s_3 \qquad (1, 2, 3).$$

В уравнениях (1) обозначено

$$G(s_3) = m_1 + m_2 s_3 \qquad (-1 < s_3 < 1),$$

где m_1, m_2 − заданные постоянные термомеханические параметры, характеризующие теплофизические и оптические свойства светоотражающего экрана [3].

Уравнения (1) образуют нелинейную многопараметрическую аналитически замкнутую систему, характеризующую движение гиростата в потенциальном СД-поле с одномерным квадратичным потенциалом [5]

$$U(s_3) = \int G(s_3)\,ds_3. \tag{2}$$

Подсистема динамических уравнений (1) имеет множества точек покоя динамической системы: точка $\mathbf{s}^0$ (0, 0, 1) и, при $m_2 \neq 0$, множество $\mathbf{s}^0$ $(s^0_1,\ s^0_2,\ s_*)$, где стационарное значение $s_* = -\, m_1/m_2$ $(|m_1|<|m_2|)$ соответствует условию $G(s_*) = 0$.

В дальнейшем у всех величин вида s^0_j верхний нулевой индекс для краткости записи опускается.

В последующем согласно равенству (2) для случая гиростата в СД-поле всюду (если не оговорено иное) полагаем

$$U''(s_3) = m_2 < 0. \qquad (3)$$

Обозначим: A_s − коэффициент поглощения лучевой мощности светового потока активной стороной экрана; b − величина рассеянной части мощности светового излучения, распределенной изотропно на активной стороне экрана; J_2, J_3 − геометрические показатели − параметры конфигурации экрана [3]. Тогда параметрическое условие (3) представимо в виде

$$2(1 - A_s)(1 - b)J_2 + [A_s + (1 - A_s)b]J_3 > 0. \qquad (4)$$

Линеаризуя систему уравнений (1) в малой окрестности ее положения равновесия

$$(\boldsymbol{\omega}^{\mathbf{0}}, \mathbf{s}^{\mathbf{0}}) = [(\mathbf{0}; 0, 0, 1) \vee (\mathbf{0}; s_1, s_2, s_*)], \qquad (5)$$

в силу уравнений этой системы в результате получаем

$$\mathbf{J}\ddot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{A}\boldsymbol{\omega} = 0. \qquad (6)$$

В динамической системе (6) обозначено:

$$\mathbf{J} = diag\,(A_1, A_2, A_3), \quad \mathbf{A} = [a_{ij}]\ (i, j = 1, 2, 3),$$

$$a_{11} = A_3^{-1}k_2^2 + A_2^{-1}k_3^2 - m_2 s_2^2, \quad a_{13} = -\, A_2^{-1}k_1 k_3,$$

$$a_{12} = m_2 s_1 s_2 - A_3^{-1}k_1 k_2, \quad a_{23} = -\, A_1^{-1}k_2 k_3,$$

$$a_{22} = A_3^{-1}k_1^2 + A_1^{-1}k_3^2 - m_2 s_1^2, \quad a_{33} = A_2^{-1}k_1^2 + A_1^{-1}k_2^2,$$

причем для элементов a_{ij} $(i \neq j)$ симметрической положительно определенной матрицы **A** имеем $a_{ij} = a_{ji}$. Отметим, что теплофизический параметр светоотражающего экрана m_3, предусмотренный термомеханической моделью [3], здесь принят равным нулю. Как показано в [3], это условие является критериальным для существования регулярного потенциала СД-поля (2).

Постулируется, что состояние равновесия гиростата (5) является устойчивым и, кроме того, предполагается, что величина $\sup|\boldsymbol{\omega}|$ достаточно мала, а $|\mathbf{s}|$ мало отличается от $|\mathbf{s}^0|$.

Характеристическое уравнение системы (6) $\left|\lambda^2\mathbf{J}+\mathbf{A}\right|=0$ представляется в виде
$$a_1\nu^3+a_2\nu^2+a_3\nu+a_4=0, \tag{7}$$
где $\nu=\lambda^2$ и обозначено
$$a_1=A_1A_2A_3,\quad a_2=A_2A_3a_{11}+A_1A_3a_{22}+A_1A_2a_{33},$$
$$a_3=A_1a_{22}a_{33}+A_2a_{11}a_{33}+A_3a_{11}a_{22}-(A_1a_{23}^2+A_2a_{13}^2+A_3a_{12}^2),$$
$$a_4=a_{11}a_{22}a_{33}+2a_{12}a_{13}a_{23}-(a_{11}a_{23}^2+a_{22}a_{13}^2+a_{33}a_{12}^2).$$
Для дальнейшего положим $k_3=0$, в силу чего
$$a_4=-A_3^{-1}m_2(A_2^{-1}k_1^2+A_1^{-1}k_2^2)(k_1s_2-k_2s_1)^2, \tag{8}$$
откуда, согласно условию (3), имеем $a_4\geq 0$. Здесь, в соответствии с равенством (8), граничный случай, при котором
$$a_4=0, \tag{9}$$
имеет место, если вектор $\mathbf{q}=\mathbf{k}\times\mathbf{s}$ ортогонален орту координатной оси Ox_3. Тогда
$$\frac{k_1}{s_1}=\frac{k_2}{s_2}=\mu\quad(\mu=const\neq 0), \tag{10}$$
и для коэффициентов уравнения (7) имеем
$$\begin{aligned} &a_2=(1+G)K^2, && a_3=(A_1A_2A_3)^{-1}GK^4,\\ &G=1-A_3m_2\mu^{-2}, && K^2=A_1k_1^2+A_2k_2^2. \end{aligned} \tag{11}$$
причем для значения $s_3=s_*$ находим
$$\mu=\pm k\left(1-\ell^2\right)^{-1/2},\qquad k=\sqrt{k_1^2+k_2^2},\quad \ell=\frac{m_1}{m_2}. \tag{12}$$

При этом для равенств (12) должно быть $|m_2|>|m_1|$.

Нахождение условий существования резонанса в динамической системе для СД-поля в форме, явно выраженной через параметры этой системы, а также самого резонансного соотношения, в общем случае является сложной задачей ввиду аналитически громоздких определяющих соотношений.

В силу этого далее рассматриваются лишь некоторые частные случаи резонансов с целью установления принципиальной возможности получения явной формы отдельных резонансных соотношений.

Рассмотрим условие возникновения в динамической системе (6) резонанса вида $\rho = m/n$, где m, n − заданные взаимно простые натуральные числа.

В силу уравнения (7) при условии (9), когда $\lambda_1^2 = 0$, для существования резонанса данного вида достаточно [6], чтобы выполнялось ограничение

$$\frac{\lambda_2^2}{\lambda_3^2} = \rho^2, \tag{13}$$

где обозначено

$$(\lambda_2, \lambda_3) = (2a_1)^{-1}(-a_2 - \sqrt{D}\,,\, - a_2 + \sqrt{D}\,) \tag{14}$$

− собственные значения матрицы, порождающей уравнение (7); D − характеристический дискриминант с коэффициентами, определяемыми равенствами (11), (12).

Согласно соотношениям (13), (14) *условие резонанса* указанного типа представляется системой ограничений

$$\begin{gathered} (\rho^2 - 1)^2 a_2^2 = (\rho^2 + 1)^2 D, \\ D = a_2^2 - 4a_1 a_3 \geq 0. \end{gathered} \tag{15}$$

В случае *простого резонанса* (при $m = n$) условия (15) сводятся к равенству $D = 0$ или, в соответствии с выражениями (11), к эквивалентному условию

$$\mu^2 (1 + G)^2 - 4G = 0, \tag{16}$$

где величина G определяется равенством (11).

Рассмотрим другой частный случай существования резонанса в динамической системе (6). Зададим структурно-динамические условия

$$m_2 = k_2 = 0, \qquad k_1 k_3 \neq 0. \tag{17}$$

Первое условие (17), в соответствии с равенством (2), при $m_1 \neq 0$ выражает линейность потенциала СД-поля по переменной s_3.

Выполняя преобразование $\mathbf{p} = \mathbf{B}\boldsymbol{\omega}$, где вектор-столбец $\mathbf{p} = [p_1 \ p_2 \ p_3]^T$ и матрица $\mathbf{B} = [b_{ij}] \ (i, j = 1, 2, 3)$, в соответствии с известным алгоритмом нормализации [6, 7], согласно которому $b_{ij} = A_i^{-1} a_{ij}$, приведем линейную динамическую систему (6) к нормальной форме

$$\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{C}\mathbf{p} = 0 \qquad (18)$$

где матрица $\mathbf{C} = diag(0, \Omega_2^2, \Omega_3^2)$, а $\boldsymbol{\Omega} = [0, \Omega_2, \Omega_3]^T$ – вектор-столбец главных (нормальных) частот осциллятора (18).

Уравнение (18) эквивалентно системе уравнений в нормализованной форме

$$\ddot{p}_1 = 0, \quad \ddot{p}_2 + \Omega_2^2 \, p_2 = 0, \quad \ddot{p}_3 + \Omega_3^2 \, p_3 = 0, \qquad (19)$$

где обозначено

$$\Omega_2^2 = b_{22}, \quad \Omega_3^2 = b_{11} + b_{33}. \qquad (20)$$

Согласно осцилляторной аналогии [2] система уравнений (19) имеет форму уравнений продольных колебаний линейно связанных осцилляторов с главными частотами $\Omega_1 = 0, \Omega_2, \Omega_3$. Эта система имеет кратные собственные частоты и находится в особом состоянии, при котором, в силу равенств (20),

$$\Omega_2^2 = \Omega_3^2 = (A_1 A_2 A_3)^{-1} K^2, \qquad (21)$$

где величина K определяется соответствующим равенством (11). Подобное состояние системы трех линейно связанных осцилляторов качественно описано в монографиях [8], [9]. Равенства (21) имеют место в силу тождества $b_{11} b_{33} - b_{13} b_{31} = 0$, справедливость которого устанавливается непосредственным вычислением.

Согласно первому уравнению (19) при задании начального условия $\dot{p}_1^0 = 0$ имеет место линейный интеграл

$$-b_{31}\,\omega_1 + b_{11}\,\omega_3 = h, \qquad (22)$$

где h – постоянная интегрирования. Это соответствует утверждению, согласно которому линейный интеграл системы (18) существует в случае, при котором ее характеристическое уравнение $\lambda^3 - (\Omega_2 + \Omega_3)\lambda^2 + \Omega_2 \Omega_3 \lambda = 0$ имеет корень $\Omega_1 = 0$ [10].

Остальные действительные корни этого уравнения, согласно равенствам (20), (21), являются кратными, в силу чего из трех линейных осцилляторов системы (19) два обладают равными величинами собственных частот.

Первый интеграл (22) линеаризованной системы (6) может являться интегралом исходной нелинейной системы уравнений (1) при выполнении аналитических условий “сращивания” областей фазового многообразия, в которых определен каждый из этих интегралов. Принципиальная возможность такого подхода показана в работе [11] и осуществлена в статье [7].

Заключение

Вопрос о существовании и установлении вида резонанса в линейной динамической системе может иметь как вспомогательное значение (в частности, в связи с решением некоторой конкретной задачи), так и самостоятельный предметный интерес [6, 7, 11, 12]. При этом в работах [6, 12] для линейных систем рассматривались резонансы вида $\rho = m/n$, где m, n − заданные взаимно простые натуральные числа.

Известно, что при малых колебаниях системы осцилляторов вопрос о существовании независимых дополнительных первых интегралов непосредственно связан с наличием резонансов в данной системе [13].

Исследованиями в области динамических систем установлено, что в резонансных системах при достаточно общих предпосылках могут существовать независимые первые интегралы (или квазиинтегралы) [14, с. 127].

При осцилляторном моделировании в динамике твердого тела в качестве основной предпосылки обычно принимается положение, согласно которому твердое тело является осциллятором в том смысле, что его состояние может быть однозначно определено заданием набора переменных "действие − угол". При этом в общем (регулярном, не резонансном) случае угловые переменные изменяются во времени с рационально независимыми частотами, а случай рациональной зависимости (резонансный случай) является исключительным [14, с. 236].

Эти "исключительные" случаи соответствуют отдельным случаям, при которых система нелинейных уравнений движения твердого тела обладает независимым первым дополнительным по Е. Уиттекеру [15] интегралом движения, существующим для определенных значений параметров системы уравнений движения [14].

Библиографический список

1. *Пуанкаре А.* Лекции по небесной механике: в 2 т. М.: Наука, 1965. 572 с.

2. *Junkins J.L., Jacobson I.D., Blanton J.N.* A nonlinear oscillator analog of rigid body dynamics // Celestial Mechanics. 1973. Vol. 7, № 4. P. 398−407.

3. *Коган А.Ю., Кирсанова Т.С.* Термомеханические явления в движении относительно центра масс космического аппарата с солнечным стабилизатором // Космические исследования. 1992. Т. 30. Вып. 3. С. 312−320.

4. *Макеев Н.Н.* Маятниковое движение гиростата в световом потоке // Доклады Российской академии естественных наук. Саратов, 2002, № 3. С. 5−17.

5. *Макеев Н.Н.* Интегралы динамики гиростата в световом потоке // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2013. Вып. 3 (22). С. 50−58.

6. *Старжинский В.Н.* Колебания в существенно нелинейных аналитических автономных системах // Проблемы аналитической механики, теорий устойчивости и управлений. М.: Наука, 1975. С. 293−300.

7. *Макеев Н.Н.* Малые колебания и сферическое движение гиростата в псевдоевклидовом пространстве // Прикладная математика и механика. 1976. Т. 40. Вып. 3. С. 417−423.

8. *Голдстейн Г.* Классическая механика. М.: Гостехиздат, 1957. 408 с.

9. *Лич Дж. У.* Классическая механика. М.: Изд-во иностранной литературы, 1961. 173 с.

10. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1965. 207 с.

11. *Цельман Ф.Х.* Малые колебания твердого тела вокруг неподвижной точки и некоторые случаи существования четвертого алгебраического интеграла // Проблемы аналитической механики, теорий устойчивости и управления. М.: Наука, 1975. С. 326−329.

12. *Смагина О.К.* О резонансных соотношениях в задаче о движении твердого тела в жидкости // Вестник Московского университета. Сер.: Математика. Механика. 1975, № 4. С. 93−96.

13. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973.

14. *Джакалья Г.Е.* Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 320 с.

15. *Уиттекер Е.Т.* Аналитическая динамика. М.; Л.: ОНТИ, 1937. 500 с.