ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ
Нелинейные динамические системы

Вып. 51 **Межвузовский сборник научных трудов** **2019**

УДК 004.9

А.Ш. Кусяков
Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
kusyakov@psu.ru; 8 (342) 239-560

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН, НАХОДЯЩИХСЯ В УСЛОВИЯХ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ИЗГИБА

Построен алгоритм оптимального проектирования трехслойной пластины, находящейся в условиях цилиндрического изгиба. Расчетные зависимости получены на основе гипотезы ломанной линии для трехслойных пластин с мембранными несущими слоями. Приведены численные результаты, позволяющие оценить эффективность использования заполнителя в конструкции пластины.

Ключевые слова: трехслойная пластинка; композит; оптимизация.

Трехслойная пластинка (рис. 1) состоит из двух тонких внешних слоев (несущие слои), изготовленных из прочного материала, а средний слой представляет собой маложесткий легкий заполнитель, обеспечивающий совместную работу внешних слоев. Предполагается, что оба несущих слоя представляют собой многослойные тонкие пластинки, а заполнитель – сплошное однородное тело.

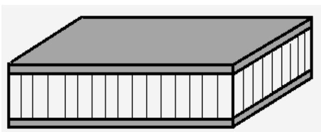

Рис. 1. Трехслойная пластинка

Введем следующие обозначения: a, b – длина и ширина пластинки соответственно; h – толщина одного несущего слоя; $2H$ – толщина заполнителя.

Пусть начало координат O находится в левом нижнем углу пластины, ось Ox направлена вдоль стороны a, а ось Oy – вдоль стороны b (рис.2).

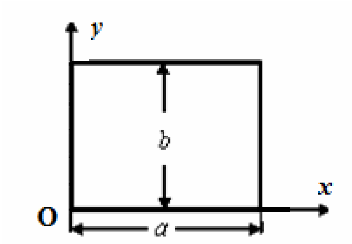

Рис. 2. Система координат прямоугольной пластинки

Для нахождения критической нагрузки пластины (рис. 3), находящейся под действием сжимающих нагрузок q, воспользуемся моделью, построенной на основе гипотезы ломаной линии [1–4, 7].

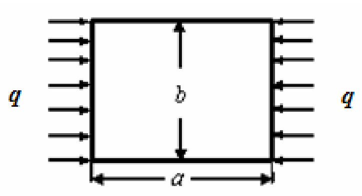

Рис.3. Пластинка, сжатая в одном направлении

Полагая, дополнительно, что несущие слои работают только на растяжение – сжатие, а сама пластинка находится в условиях цилиндрического изгиба, получим следующее разрешающее уравнение устойчивости:

$$2C_x\left(H+\frac{h}{2}\right)^2\frac{d^4w}{dx^4}-q\left(\frac{C_xH}{G_{xz}}\frac{d^4w}{dx^4}-\frac{d^2w}{dx^2}\right)=0\,. \qquad (1)$$

Здесь w – перемещение по нормали к срединной поверхности пластины; C_x – мембранная жесткость одного несущего слоя; G_{xz} – модуль поперечного сдвига заполнителя

Решение уравнения ищем в виде:

$$h = \frac{q_0}{2\sigma_{-1v}} = 0{,}001(м), \tag{2}$$

где m – число полуволн в направлении оси Ox.

Подставив выражение в основное разрешающее уравнение устойчивости, из условия существования нетривиального решения, получим следующее выражение для параметра нагрузки:

$$q = \frac{2C_x\left(H + \frac{h}{2}\right)^2\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2}{\frac{C_x H}{G_{xz}}\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + 1}. \tag{3}$$

Наименьшее значение параметра q достигается, очевидно, при $m = 1$. Таким образом, критическая нагрузка для трехслойной пластины, находящейся в условиях цилиндрического изгиба, вычисляется по формуле:

$$q = \frac{2C_x\left(H + \frac{h}{2}\right)^2\left(\frac{\pi}{a}\right)^2}{\frac{C_x H}{G_{xz}}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + 1}. \tag{4}$$

Для сравнения приведем выражение критической нагрузки неподкрепленной пластинки (без заполнителя), находящейся в условиях цилиндрического изгиба:

$$q_c = D_x\left(\frac{\pi}{a}\right)^2, \tag{5}$$

где D_x – изгибная жесткость неподкрепленной пластинки.

При проектировании трехслойных пластин, находящихся под действием сжимающих нагрузок, воспользуемся методом разделения параметров оптимизации на две группы: первая группа параметров определяется из условий прочности (толщины несущих слоев), а вторая группа (толщина заполнителя) – из условий устойчивости. Алгоритм оптимального проектирования трехслойной пластинки, построенный на основе метода разделения параметров оптимизации состоит из следующих шагов [5–6]:

1. Полагаем, что несущие слои состоят только из продольных монослоев.

2. По известной величине сжимающей нагрузки и пределу прочности материала при сжатии вычисляем толщину одного несущего слоя h.

3. Вычисляем величину критической нагрузки для пластинки толщиной $2h$ (без заполнителя). Проверяем выполнение условия устойчивости. Если это условие выполняется, то процесс оптимального проектирования завершается. Если условие устойчивости нарушается, то решаем уравнение относительно одного неизвестного H (полутолщина заполнителя)

$$q_c(H) = q_0 . \tag{6}$$

Здесь q_c – критическая нагрузка трехслойной пластины, q_0 – заданная сжимающая нагрузка.

4. По найденным значениям толщин несущих слоев и заполнителя вычисляем массу оптимальной трехслойной пластинки.

Пример. Трехслойная пластинка длиной a и шириной b находится под действием сжимающей нагрузки q_0 Исходные данные для несущих слоев: жесткость монослоя в направлении армирования $b_{11} = 1{,}404 \cdot 10^{11}\,(\text{н/м}^2)$; предел прочности монослоя при сжатии $\sigma_{-1v} = 0{,}7 \cdot 10^9\,(\text{н/м}^2)$; плотность материала монослоя $\rho_0 1450\left(\text{кг/м}^3\right)$. Пластина подкреплена легким заполнителем с модулем сдвига $G_{xz} = 0{,}15 \cdot 10^9\,(\text{н/м}^2)$ и плотностью $\rho_z = 53\,(\text{кг/м}^3)$.

Требуется вычислить массу оптимальной трехслойной пластины, если $q_0 = 1{,}4 \cdot 10^6\,(\text{н/м})$; $a = b = 0{,}5\,(\text{м})$.

Полагаем, что несущие слои состоят только из продольных монослоев. В этом случае

$$C_x = b_{11} h\,.$$

Вычисляем толщину одного несущего слоя из условия прочности:

$$h = \frac{q_0}{2\sigma_{-1v}} = 0{,}001\,(\text{м})\,.$$

По формуле (5) вычисляем величину критической нагрузки для неподкрепленной пластинки толщиной $2h$ (без заполнителя):

$$q_c = \frac{b_{11}(2h)^3}{12}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 = 0{,}37 \cdot 10^3\,(\text{н/м})\,.$$

Проверяем выполнение условий устойчивости:

$$\frac{q_0}{q_c} = \frac{1{,}4 \cdot 10^6}{0{,}37 \cdot 10^3} > 1\,.$$

Таким образом, условие устойчивости нарушается. Требуется решить уравнение (6) относительно величины H. Подставив в левую часть уравнения (6) выражение для критической нагрузки (4), получим:

$$\frac{2C_x\left(H + \dfrac{h}{2}\right)^2\left(\dfrac{\pi}{a}\right)^2}{\dfrac{C_x H}{G_{xz}}\left(\dfrac{\pi m}{a}\right)^2 + 1} = q_0\,. \tag{7}$$

Уравнение (7) можно преобразовать к квадратному уравнению относительно искомой величины H

$$H^2 + pH + r = 0\,, \tag{8}$$

где

$$p = h - \frac{q_0}{2G_{xz}}\,, \quad r = \left(\frac{h}{2}\right)^2 - \frac{q_0}{2C_x}\left(\frac{a}{\pi}\right)^2. \tag{9}$$

Положительный корень полученного квадратного уравнения:

$$H = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}. \qquad (10)$$

Подставив в последнюю формулу числовые значения, получим

$$H = 0{,}013\,(\text{м}).$$

Таким образом, полная толщина трехслойной пластинки

$$h_T = 2(h + H) = 0{,}028\,(\text{м}).$$

Вычислим массу оптимальной трехслойной пластины:

$$G_T = 2ab\left(\rho_0 h + \rho_z H\right) = 1{,}08\ (\text{кг}).$$

Для оценки эффективности использования заполнителя, вычислим массу неподкрепленной пластины. Толщину пластины без заполнителя определим из условия

$$q_c\left(h_0\right) = q_0. \qquad (11)$$

Здесь q_c, h_0 – критическая нагрузка и толщина неподкрепленной пластины. Изгибная жесткость неподкрепленной пластинки толщиной h_0, состоящей только из продольных монослоев вычисляется по формуле:

$$D_x = \frac{b_{11} h_0^3}{12}. \qquad (12)$$

Подставив выражение (5) в левую часть уравнения (11), с учетом зависимости (12), после несложных преобразований получим:

$$h_0 = \sqrt[3]{12 \frac{q_0}{b_{11}} \left(\frac{a}{\pi}\right)^2}.$$

Подставив числовые значения в последнюю формулу, найдем толщину неподкрепленной пластины:

$$h_0 = 0{,}014\,(\text{м}).$$

Найдем массу неподкрепленной пластины:

$$G_0 = ab\rho_0 h_0 = 5{,}25\ (\text{кг}).$$

Таким образом, использование заполнителя привело к увеличению толщины оболочки в два раза, но при этом позволило снизить массу конструкции почти в пять раз.

Библиографический список

1. *Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов В.Г.* Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1984. 264 с.

2. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.

3. *Григолюк Э.И., Чулков П.П.* Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М.: Машиностроение, 1973. 170 с.

4. *Кобелев В.Н., Коварский Л.М., Тимофеев С.И.* Расчет трехслойных конструкций справочник. М.: Машиностроение, 1984. 304 с.

5. *Кусяков А.Ш.* Трехслойные оболочки минимальной массы // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2005. Вып. 2. С. 166–173.

6. *Кусяков А.Ш.* Проектирование композитных трехслойных пластин // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. Пермь, 2014. Вып.46. С. 46–52.

7. *Сухинин С.Н.* Прикладные задачи устойчивости многослойных композитных оболочек. М.: Физматлит, 2010. 248 с.