

УДК 519.642

И.Е. Полосков

*Пермский государственный
национальный исследовательский университет*

Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
polosk@psu.ru; (342) 2-396-560

**ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА
(ПО ПРОСТРАНСТВУ) В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ
С ВРЕМЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ**

Рассматривается один из классов функционально-дифференциальных уравнений, а именно, интегро-дифференциальные уравнения в частных производных Фредгольма по пространственным переменным и с постоянным запаздыванием по времени. Для одного из нелинейных уравнений этого типа представлена схема комбинации метода шагов и расширения пространства состояний. В работе представлен алгоритм и детали программной реализации этой схемы. Приведены результаты расчетов для нескольких значения величины запаздывания.

Ключевые слова: функциональное дифференциальное уравнение, интегро-дифференциальное уравнение в частных производных, уравнение с запаздыванием, нелинейное уравнение, расширение пространства состояний, моделирование, приближенное решение.

Введение

При математическом моделировании практически во всех областях науки, техники, экономики и общественности применяются

функциональные уравнения, включающие линейные и нелинейные дифференциальные, интегральные и интегро-дифференциальные уравнения.

Как известно, термин *интегро-дифференциальное уравнение* (ИДУ) означает, что функциональное уравнение содержит неизвестную функцию, ее производные до некоторого порядка и независимую переменную, причем неизвестная функция и/или ее производные встречаются под знаком интеграла. Однако хорошо известно, что это определение является чисто формальным [2], так как во многих случаях можно легко перейти от одного типа уравнений к другому.

Классификация интегро-дифференциальных уравнений достаточно трудна [2]. Если производная неизвестной функции берется только по одной переменной, то ИДУ называется *обыкновенным* (ОИДУ). Оно будет уравнением n -го порядка, если n – порядок старшей производной. ИДУ, содержащие производные по различным переменным, в частности по времени и пространственным координатам, называются *интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных* (ИДУвЧП). Среди последних можно выделить некоторые типы, аналогичные эллиптическим, гиперболическим и параболическим типам дифференциальных уравнений.

Среди ОИДУ и ИДУвЧП присутствуют три основные формы уравнений: с интегралами с переменным верхним пределом по времени (типа Вольтерры), с интегралами по конечному (как правило, это свойственно ОИДУ) или бесконечному (пространственному для ИДУвЧП) промежутку (типа Фредгольма) и смешанными видами интегралов, включая кратные для ИДУвЧП.

Далее основное внимание уделяется уравнения смешанной формы и системам таких уравнений, которые в более или менее общем виде можно представить так:

$$\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}'_x(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}''_{xx}(\mathbf{x}, t), \dots, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t - \tau), \mathbf{u}'_x(\mathbf{x}, t - \tau), \mathbf{u}''_{xx}(\mathbf{x}, t - \tau), \dots, \int_{\mathbb{D}} [\cdot] d\mathbf{x}),$$

где τ – постоянное запаздывание, а \mathbb{D} – ограниченная или неограниченная область.

Основные вопросы о существовании решений линейных и нели-

нейных интегро-дифференциальных уравнений в случае любого числа переменных и уравнений и даже в случае бесконечного числа их были исследованы в работах Л. Помейя (1923–1927 гг.) [2], результаты которого позволяют получить решения ИДУ как в ограниченных, так и неограниченных областях.

В настоящее время более интенсивными являются исследования по ОИДУ типа Фредгольма с запаздыванием [23, 37, 39, 43]. ИДУ в ЧП подобного типа рассматриваются реже. Как правило, исследователи обращают внимание на изучение сочетаний фредгольмовой части по пространству с вольтерровой по времени. Заметим, что сходная ситуация наблюдается и в публикациях по ОИДУ: в них основной упор также делается на уравнения с фредгольмовой и вольтерровой частями, а переменной интегрирования в интегралах обоих типов является время.

Семейство уравнений рассматриваемого типа включает: уравнения моделей реакции–диффузии роста зрелых популяций единственного биологического вида с учетом возрастной структуры этого вида [44]

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \beta u(x, t) + \gamma \int_{-\infty}^{+\infty} K(x - y) h(u(y, t - \tau)) dy;$$

системы нелокальных уравнений реакции–диффузии [42], моделирующие распространение бактериальных инфекций; нелокальные уравнения реакции–диффузии с запаздыванием [11, 34], описывающие распространение бегущих волн; нелинейные уравнения механической обработки (точение, фрезерование) [3]; уравнения колебательных процессов в нейронах мозга [24]; уравнения биологических генных сетей [40]; уравнения распространения тепла в стержне с обратной связью [16] и др.

Тесно связанными с указанным семейством являются:

а) ИДУ в ЧП типа Фредгольма по пространству без запаздывания по времени, примерами которых будут: уравнение Шлесингера (L. Schlesinger) [28], одно из первых уравнений такого типа, рассмотренных в начале XX в.:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \int_a^b f(x, y, s) u(x, s) ds;$$

уравнение вибрации струны [21]:

$$u(x, t) = -\frac{1}{T} \int_0^L g(x, x') \mu(x') \frac{\partial^2 u(x', t)}{\partial t^2} dx',$$

где $u(x, t)$ – смещения точек струны, L – длина струны; нелинейное уравнение Кирхгофа (G. R. Kirchhoff) поперечных колебаний струны [28]:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \left[\lambda + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2};$$

нелинейное ИДУ поперечных колебаний балки [19]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} = \\ = \lambda \left[\int_0^1 \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \beta P(u(x, t), t); \end{aligned}$$

уравнение Колмогорова–Феллера (КФ-уравнение) [6,8–10] для плотности вероятности $p(\mathbf{x}, t)$ вектора состояния с возмущениями в форме винеровских и пуассоновских процессов:

$$\frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mathbb{L}_{xt}^\dagger [p(\mathbf{x}, t)], \quad p(\mathbf{x}, t_0) = p^0(\mathbf{x}),$$

где

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_{xt}^\dagger [p(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, \tau)] = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial [a_i(\mathbf{x}, t) p(\mathbf{x}, t)]}{\partial x_i} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 [b_{ij}(\mathbf{x}, t) p(\mathbf{x}, t)]}{\partial x_i \partial x_j} - c(\mathbf{x}, t) p(\mathbf{x}, t) + \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t) p(\mathbf{z}, t) d\mathbf{z}; \end{aligned}$$

нелинейные уравнения Больцмана переноса в различных средах и их вариации [5]; уравнения переноса нейтронов в ядерных реакторах [1], распространения болезней [32], управляемых систем, описываемых одномерным ИДУ в ЧП параболического типа [38], физиологически структурированных популяционных моделей с распределенным процессом пополнения [20], гибридной системы, описыва-

ющей поведение ядерного реактора [29]; ИДУвЧП типа Барбашина [12], применяемые в физике, теории управления, в моделях мутаций, распространении радиации в атмосфере планет и звезд, в теории случайных процессов как частный случай КФ-уравнений для чисто разрывных марковских процессов в астрофизике; уравнения, моделирующие поведение нейронных сетей [26, 27], эволюционной эпидемиологической модели распространения гриппа А [30], кинетической клеточной модели взаимодействия опухолевой и иммунной систем [25]; нелинейные интегро-параболические уравнения типа Фоккера–Планка, которые возникают при статистическом описании динамики поведения популяции из бесконечного количества нелинейно связанных случайных резонаторов, подверженных взаимодействию типа "основного поля", обобщают и уточняют известную модель Курамото, описывающую эффект самосинхронизации в областях от биологии и медицины до физики и нейросетей [7]; системы стандартных уравнений хемостата [33] и т.д.;

б) ИДУвЧП типа Фредгольма по пространству в сочетании с конечным распределенным запаздыванием по времени, которое в некоторых случаях можно считать малым. Среди них отметим: бистабильное уравнение реакции–диффузии с (малым) нелокальным запаздыванием [41]; нелинейное ИДУвЧП, представляющее популяционную динамику с эффектами запаздывания [36]; уравнения Максвелла, описывающие проникновение электромагнитного поля в вещество [28], тепловых потоков [28] и т.п.

В обзоре [22] можно найти дополнительные модели связанные с ИДУвЧП, опубликованные до 2003 г.

Задачи качественного анализа ИДУвЧП рассматриваемого типа включают исследование устойчивости систем, наличия стационарных состояний, асимптотического поведения, полугрупповых свойств [17] и др.

Что касается точных решений ИДУвЧП в различных формах, то как правило, таковые имеются только для специально построенных уравнений.

Приближенное же решение таких уравнений затруднено, а методы сочетают схемы численного интегрирования эволюционных ДУвЧП с процедурами численного интегрирования для фредгольмовских интегралов по пространству и прогнозные алгоритмы для вольтерровских [35]. Наличие запаздываний в уравнениях приводит

к добавлению схем их учета, аналогичных используемым при приближенном решении обыкновенных дифференциально-разностных уравнений [13, 14, 18].

Например, в работе [15] для аппроксимации несобственного интеграла по пространству используется замена переменных в сочетании с применением функций Бесселя. Получившееся ИДУвЧП с запаздыванием в дальнейшем решается средствами физико-математического пакета *COMSOL*. В работе [26] для решения эволюционного ИДУвЧП без запаздывания применяется алгоритм, использующий линейные и нелинейные коллокации, квадратурные формулы Гаусса для бесконечных интервалов и интерполяцию для отображения на равномерную сетку на ограниченном интервале. В работе [27] для решения подобного уравнения применяется процедура, включающая неявную схему Эйлера по времени, разложение по базисным функциям и метод коллокаций на $(-\infty, +\infty)$ для вычисления несобственных интегралов.

Отметим также следующие методы: использование рядов по различным функциям, например, по полиномам Лагерра и Эрмита (для бесконечной области), Чебышёва (для конечной); методы конечных разностей, в частности, схемы Кранка–Николсона, конечных элементов, спектральный и псевдоспектральный; методы разложения решения по собственным функциям линейной краевой задачи, вейвлет-сжатия, статистического моделирования, прямых и Шварца (с перекрытием); применение квадратурных формул (например, Симпсона) в сочетании с методом Ромберга; выделение конечной области при постановке задачи в неограниченной области. Все указанные методы используются для аппроксимации решения на пространственной сетке и др.

Далее для получения приближенного решения одного из представителей рассматриваемой группы ИДУвЧП – интегро-дифференциальных уравнений в частных производных Фредгольма по пространственным переменным и с постоянным запаздыванием по времени для исключения членов с запаздыванием применяется схема, основанная на комбинации метода шагов и расширении пространства состояний. Рассматривается алгоритм и детали программной реализации этой схемы. Приведены результаты расчетов для нескольких значений величины запаздывания. Реализация алгоритма осуществлена в формате программы на входном языке паке-

та компьютерной алгебры (ПКА) *Mathematica* [31].

1. Постановка задачи и метод решения

Рассмотрим следующее нелинейное ИДУ Фредгольма (по пространству) в частных производных с постоянным запаздыванием следующего вида:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + b u(x, t) - \mu u^3(x, t) + \gamma \left[\alpha - \frac{1}{L} \int_0^L u(x, t - \tau) dx \right], \quad x \in (0, L), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(x, t) = u^{[0]}(x, t), \quad x \in [0, L], \quad t \in [-\tau, 0], \quad (2)$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

где t – время ($-\tau \leq t \leq T < +\infty$), $u(x, t)$ – решение уравнения, $L, a > 0, b, \alpha, \gamma, \mu$ – постоянные величины, $u^{[0]}(x, t)$ – известная функция.

Для решения задачи (1)–(3) применим метод прямых [4] в сочетании с расширением пространства состояний. Для этого построим на отрезке $[0, L]$ равномерную сетку:

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < \dots < x_{K-1} < x_K = L, \\ x_k = h k, \quad k = \overline{0, K},$$

где h – шаг сетки ($0 < h \ll 1$), обозначим через $u_k(t)$ зависящую от времени величину решения $u(x, t)$ в узле x_k и определим конечно-разностную аппроксимацию для $u''_{xx}(x, t)$ второго порядка точности по h :

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \approx \frac{u_{k+1}(t) - 2u_k(t) + u_{k-1}(t)}{h^2}, \quad 0 < k < K.$$

Кроме того, используя те же узлы, по формуле Симпсона (считаем, что K – четное число) приблизим интегральный член в уравнении (ошибка порядка h^4) следующим образом:

$$\int_0^L u(x, t - \tau) dx \approx \frac{h}{3} \sum_{\ell=0}^K c_\ell u_\ell(t - \tau),$$

где

$$c_\ell = \begin{cases} 1, & \ell = 0 \text{ или } \ell = K, \\ 2, & \ell - \text{четное число}, \\ 4, & \ell - \text{нечетное число}. \end{cases}$$

Для аппроксимации краевых условий воспользуемся формулами также второго порядка точности по h :

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} \approx \frac{u_0(t) - 4u_1(t) + 3u_2(t)}{2h},$$

$$\frac{\partial u(L, t)}{\partial x} \approx \frac{-3u_{K-2}(t) + 4u_{K-1}(t) - u_K(t)}{2h}.$$

В результате получаем следующую систему обыкновенных дифференциально-алгебраических уравнений с запаздыванием (ОДА-УсЗ):

$$\dot{u}_k(t) = a^2 \frac{u_{k+1}(t) - 2u_k(t) + u_{k-1}(t)}{h^2} + b u_k(t) - \mu u_k^3(t) +$$

$$+ \gamma \left[\alpha - \frac{1}{L} \frac{h}{3} \sum_{\ell=0}^K c_\ell u_\ell(t - \tau) \right], \quad 1 \leq k \leq K - 1,$$

$$u_0(t) - 4u_1(t) + 3u_2(t) = 0, \quad -3u_{K-2}(t) + 4u_{K-1}(t) - u_K(t) = 0$$

с начальными условиями $u_k(0) = u^{[0]}(x_k, 0)$, решение которой дает аппроксимацию $u(x, t)$ в узлах сетки для $t > 0$. Теперь для решения этой системы расширим пространство состояний. Для этого введем следующие обозначения:

$$s \in [0, \tau], \quad t_q = q\tau, \quad q = 0, 1, 2, \dots, N + 1, \quad t_{N+1} \geq T,$$

$$\Delta_q = (t_q, t_{q+1}], \quad \bar{\Delta}_q = [t_q, t_{q+1}),$$

$$\mathbf{u}_q(s) = \mathbf{u}(s + t_q), \quad \mathbf{u}_q(0) = \mathbf{u}_{q-1}(\tau),$$

$$\mathbf{u}_q(s) = \{u_{q0}(s), u_{q1}(s), \dots, u_{qN}(s)\}^\top.$$

0°: Рассмотрим полуинтервал Δ_0 . Определённый на Δ_0 векторный процесс $\mathbf{u}_0(s)$ удовлетворяет системе ОДАУ вида (теперь точкой обозначается производная по s):

$$\dot{u}_{0k}(s) = a^2 \frac{u_{0,k+1}(s) - 2u_{0k}(s) + u_{0,k-1}(s)}{h^2} + b u_{0k}(s) - \mu u_{0k}^3(s) +$$

$$\begin{aligned}
 & +\gamma \left[\alpha - \frac{1}{L} \int_0^L u^{[0]}(x, s - \tau) dx \right], \quad 1 \leq k \leq K - 1, \\
 & u_{00}(s) - 4 u_{01}(s) + 3 u_{02}(s) = 0, \\
 & -3 u_{0,K-2}(s) + 4 u_{0,K-1}(s) - u_{0K}(s) = 0.
 \end{aligned}$$

1°. Теперь обратимся к сегментам Δ_0 и Δ_1 . Систему ОДФУ для вычисления вектора $\text{col}(\mathbf{u}_0(s), \mathbf{u}_1(s))$ можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \dot{u}_{0k}(s) &= a^2 \frac{u_{0,k+1}(s) - 2 u_{0k}(s) + u_{0,k-1}(s)}{h^2} + b u_{0k}(s) - \mu u_{0k}^3(s) + \\
 & +\gamma \left[\alpha - \frac{1}{L} \int_0^L u^{[0]}(x, s - \tau) dx \right], \quad 1 \leq k \leq K - 1, \\
 & u_{00}(s) - 4 u_{01}(s) + 3 u_{02}(s) = 0, \\
 & -3 u_{0,K-2}(s) + 4 u_{0,K-1}(s) - u_{0K}(s) = 0; \\
 \dot{u}_{1k}(s) &= a^2 \frac{u_{1,k+1}(s) - 2 u_{1k}(s) + u_{1,k-1}(s)}{h^2} + b u_{1k}(s) - \mu u_{1k}^3(s) + \\
 & +\gamma \left[\alpha - \frac{1}{L} \frac{h}{3} \sum_{k=0}^K c_k u_{0k}(s) \right], \quad 1 \leq k \leq K - 1, \\
 & u_{10}(s) - 4 u_{11}(s) + 3 u_{12}(s) = 0, \\
 & -3 u_{1,K-2}(s) + 4 u_{1,K-1}(s) - u_{1K}(s) = 0. \\
 & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

N°. Рассмотрим временные полуинтервалы $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_N$. Построим систему ОДАУ для вектора $\text{col}(\mathbf{u}_0(s), \mathbf{u}_1(s), \dots, \mathbf{u}_K(s))$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \dot{u}_{0k}(s) &= a^2 \frac{u_{0,k+1}(s) - 2 u_{0k}(s) + u_{0,k-1}(s)}{h^2} + b u_{0k}(s) - \mu u_{0k}^3(s) + \\
 & +\gamma \left[\alpha - \int_0^L u^{[0]}(x, s - \tau) \right], \quad 1 \leq k \leq K - 1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & u_{00}(s) - 4u_{01}(s) + 3u_{02}(s) = 0, \\
 & -3u_{0,K-2}(s) + 4u_{0,K-1}(s) - u_{0K}(s) = 0; \\
 \dot{u}_{1k}(s) &= a^2 \frac{u_{1,k+1}(s) - 2u_{1k}(s) + u_{1,k-1}(s)}{h^2} + bu_{1k}(s) - \mu u_{1k}^3(s) + \\
 & + \gamma \left[\alpha - \frac{1}{L} \frac{h}{3} \sum_{\ell=0}^K c_{\ell} u_{0\ell}(s) \right], \quad 1 \leq k \leq K-1, \\
 & u_{10}(s) - 4u_{11}(s) + 3u_{12}(s) = 0, \\
 & -3u_{1,K-2}(s) + 4u_{1,K-1}(s) - u_{1K}(s) = 0; \\
 & \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
 \dot{u}_{Nk}(s) &= a^2 \frac{u_{N,k+1}(s) - 2u_{Nk}(s) + u_{N,k-1}(s)}{h^2} + bu_{Nk}(s) - \mu u_{Nk}^3(s) + \\
 & + \gamma \left[\alpha - \frac{1}{L} \frac{h}{3} \sum_{\ell=0}^K c_{\ell} u_{N-1,\ell}(s) \right], \quad 1 \leq k \leq K-1, \\
 & u_{N0}(s) - 4u_{N1}(s) + 3u_{N2}(s) = 0, \\
 & -3u_{N,K-2}(s) + 4u_{N,K-1}(s) - u_{NK}(s) = 0.
 \end{aligned}$$

Итак, получена система ОДАУ без запаздывания, причем преобразование ее в систему ОДУ с целью дальнейшего численного интегрирования не составляет труда.

2. Пример

Изложенный выше алгоритм был реализован в виде программы на входном языке пакета МатнематиСА. При проведении расчетов использовались следующие значения параметров:

$$\begin{aligned}
 a &= 0.01, \quad b = 1, \quad \mu = 0.1, \quad \alpha = 0.5, \\
 \gamma &= 10, \quad L = 4, \quad T = 5, \quad h = 0.01, \\
 \tau &\in 0.0, 0.5, 1.0, 2.0,
 \end{aligned}$$

$$u^{[0]}(x, t) = \frac{1}{32} x^2 (x - L/4) (x - 2L/3) (x - L)^2.$$

Полученные результаты расчетов отображены на рис. 1–6. Первый и последний рисунки показывают начальное и финальное по-

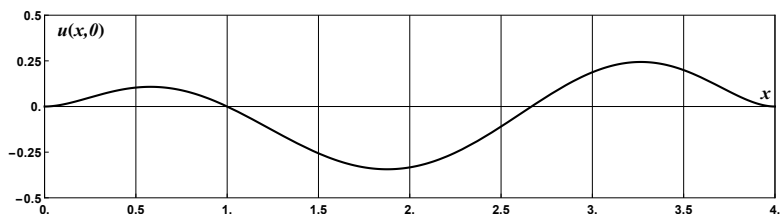


Рис. 1

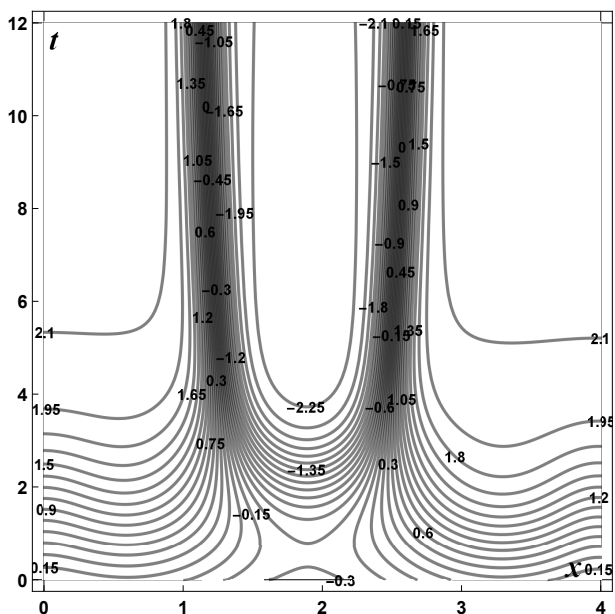


Рис. 2

ложение функции $u(x, t)$, а остальные последовательно демонстрируют линии уровня для этой функции при $\tau = 0.0, 0.5, 1.0$ и 2.0 . На основании полученных данных несложно установить, что:

- финальные состояния для переходных процессов для $\tau > 0.0$ в рамках времени расчетов находились для $u(x, t)$ в достаточно узкой ограниченной области, что позволяет предположить, что для всех этих переходных процессов предельным является одно и то же состояние;

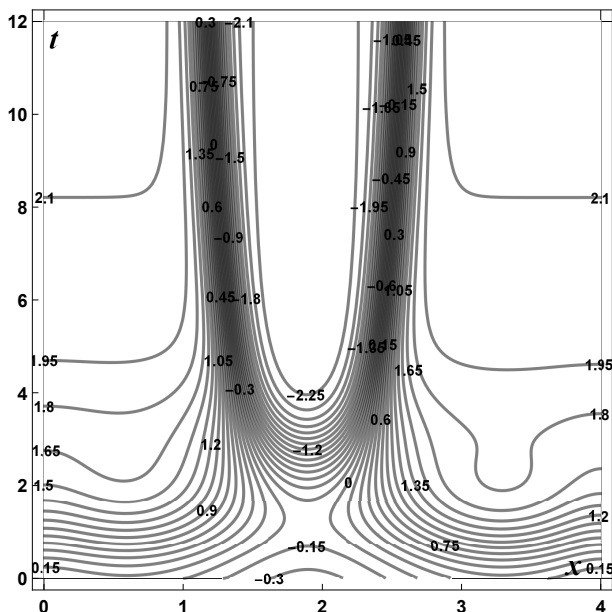


Рис. 3

– с ростом τ наблюдалось увеличение продолжительности переходных процессов;

– динамика переходных процессов для $\tau > 0.0$ существенно отличалась от случая для $\tau = 0.0$. Если для $\tau = 0.0$ переход в финальное состояние происходил в форме практически монотонного возрастания значений функции $u(x, t)$, то для $\tau > 0.0$ наблюдались колебательные процессы выхода в такое состояние;

– колебательный режим для $\tau = 2.0$ существенно отличался от режимов при $\tau = 0.5$ и 1.0 и 2.0 , что и выразилось в наличии в появлении нескольких циклов колебаний. Это позволяет предположить, что с ростом величины запаздывания число таких циклов будет увеличиваться.

Заключение

В статье изложен аппарат и алгоритмы применения сочетания метода шагов и расширения пространства состояний, предназначенные для моделирования переходных процессов в системах, опи-

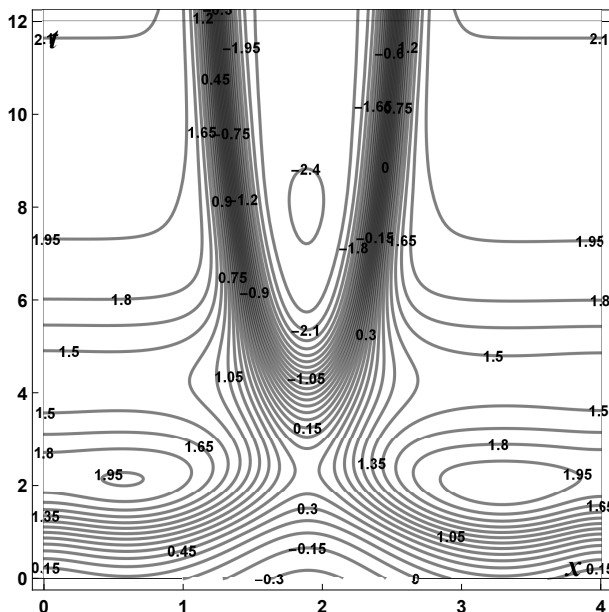


Рис. 4

сываемых одним из классов ИДУВЧП. Представлены структуры уравнений для расчета решения на последовательных временных отрезках функций, необходимые расчетные формулы и результаты применения схемы для анализа одного из нелинейных уравнений, которые могут быть применены для синтеза управления подобными системами.

Библиографический список

1. *Владимиров В.С., Лебедев В.И.* Ядерная энергетика и математика // Современные проблемы вычислительной математики и математического моделирования / Ин-т вычисл. математики. М.: Наука, 2005. Т. 2. С. 5–37.

2. *Вольтерра В.* Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений: пер. с англ. М.: Наука, 1982. 304 с.

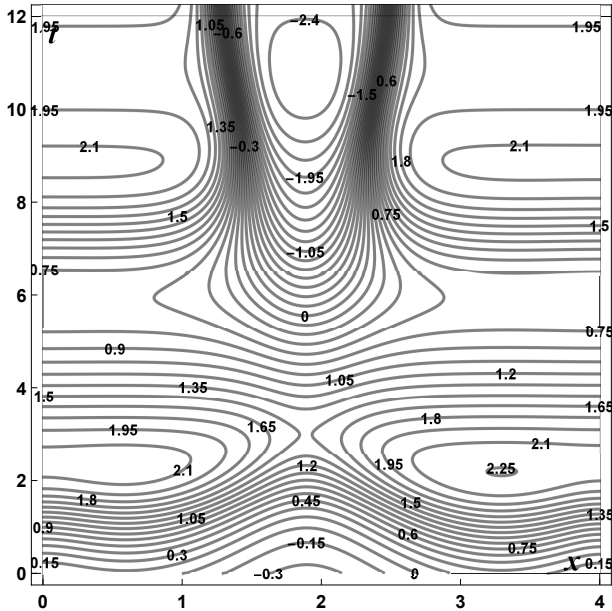


Рис. 5

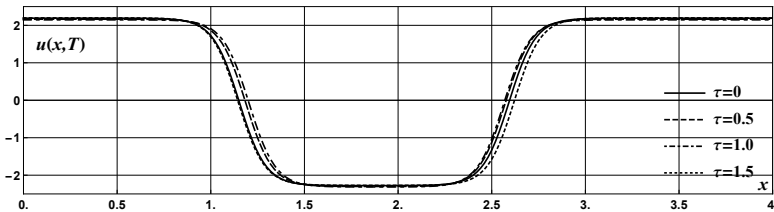


Рис. 6

3. *Жарков И.Г.* Вибрации при обработке лезвийным инструментом. Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1986. 184 с.

4. *Калиткин Н.Н.* Численные методы: учеб. пособие. 2-е изд. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 592 с.

5. *Колесников П.М.* Методы теории переноса в нелинейных средах. Мн.: Наука и техника, 1981. 336 с.

6. *Колмогоров А.Н.* Über die analitische Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung // *Mathematische Annalen*. 1931. В. 104. S. 415

–458 (перевод: Об аналитических методах в теории вероятностей // Успехи математических наук. 1938. Т. 5. С. 5–41).

7. *Лаврентьев М.М. (мл.), Спиглер Р., Алметов Д.Р.* Регуляризация нелинейного интегрально-параболического уравнения Фоккера–Планка с пространственно-периодическими решениями. Существование сильных решений // Сибирский математический журнал. 2001. Т. 42, № 4. С. 825–848.

8. *Полосков И.Е.* Стохастический анализ динамических систем [Электронный ресурс]: монография. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2016. 772 с.

9. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977. 486 с.

10. *Феллер В.* К теории стохастических процессов (Теоремы существования и единственности) // Успехи математических наук. 1938. № 5. С. 57–96.

11. *Aguerreza M., Valenzuela G.* On the minimal speed of traveling waves for a non-local delayed reaction-diffusion equation // Nonlinear Oscillations. 2008. Vol. 13, № 1. P. 1–9.

12. *Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P.* Partial integral operators and integro-differential equations: Pure and Applied Mathematics. New York: Marcel Dekker, 2000. X, 560 p.

13. *Baker C.T.H., Paul C.A.H., Willé D.R.* A bibliography on the numerical solution of delay differential equations // Numerical Analysis Reports, № 269, Version 1.0 / Manchester Centre for Computational Mathematics, Mathematics Department. Manchester: University of Manchester, 1995. 52 p.

14. *Baker C.T.H., Paul C.A.H., Willé D.R.* Issues in the numerical solution of evolutionary delay differential equations // Advances in Computational Mathematics. 1995. Vol. 3, № 1. P. 171–196.

15. *Bani-Yaghoob M., Yao G., Reed A.W.* Modeling and numerical simulations of single species dispersal in symmetrical domains // International Journal of Applied Mathematics. 2014. Vol. 27, № 6. P. 525–547.

16. *Batkai A., Piazzera S.* Semigroups for delay equations. URL: https://www.researchgate.net/profile/Andras_Batkai/publication/248390432_Semigroups_for_Delay_Equations/links/0deec53c8614242d17000000/Semigroups-for-Delay-Equations.pdf?origin=publication_detail (дата обращения 23.10.2019)

17. *Batkai A., Piazzera S.* Semigroups for delay equations. New York: A K Peters/CRC Press, 2005. XII, 259 p.

18. *Bellen A., Zennaro M.* Numerical methods for delay differential equations. Oxford: Oxford University Press, 2003. XIV, 395 p.

19. *Berti M., Carminati C.* Chaotic dynamics for perturbations of infinite dimensional Hamiltonian systems // *Nonlinear Analysis*. 2002. Vol. 48, № 4. P. 481–504.

20. *Calsina Á., Odo Diekmann O., Farkas J.Z.* Structured populations with distributed recruitment: from PDE to delay formulation // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2016. Vol. 39, № 18. P. 5175–5191.

21. *Cochran J.A.* The analysis of linear integral equations. New York: McGraw-Hill Education, 1972. 370 p.

22. *Gourley S.A., So J.W.-H., Wu J.H.* Nonlocality of reaction–diffusion equations induced by delay: biological modeling and nonlinear dynamics // *Journal of Mathematical Sciences*. 2004. Vol. 124, № 4. P. 5119–5153.

23. *Huang C., Vandewalle S.* An analysis of delay-dependent stability for ordinary and partial differential equations with fixed and distributed delays // *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2004. Vol. 25, № 5. P. 1608–1632.

24. *Hutt A.* The study of neural oscillations by traversing scales in the brain: Habilitation á diriger des recherches. Université Nice–Sophia Antipolis, 2011. 102 p.

25. *Iori M., Nespi G., Spiga G.* Analysis of a kinetic cellular model for tumor-immune system interaction // *Mathematical and Computer Modelling*. 1999. Vol. 29, № 8, P. 117–129.

26. *Jackiewicz Z., Rahman M., Welfert B.D.* Numerical solution of a Fredholm integro-differential equation modelling neural networks // *Applied Numerical Mathematics*. 2006. Vol. 56, № 3–4. P. 423–432.

27. *Jackiewicz Z., Rahman M., Welfert B.D.* Numerical solution of a Fredholm integro-differential equation modelling $\hat{\theta}$ -neural networks // *Applied Mathematics and Computation*. 2008. Vol. 195, № 2. P. 523–536.

28. *Jangveladze T., Kiguradze Z., Neta B.* Numerical solutions of three classes of nonlinear parabolic integro-differential equations. Amsterdam e.a.: Elsevier Inc., 2016. 254 p.

29. *Lakshmikantham V., Rao M.R.M.* Theory of integro-differential equations. Reading, UK: Gordon and Breach Science Publishers, 1995. 384 p.

30. *Magal P., Ruan Sh.* Sustained oscillations in an evolutionary epidemiological model of influenza A drift // Proceedings of The Royal Society A Mathematical Physical and Engineering Sciences. 2010. Vol. 466. P. 965–992.

31. *Mangano S.* Mathematica cookbook. Cambridge: O'Reilly, 2010. XXIV, 800 p.

32. *Medlock J., Kot M.* Spreading disease: integro-differential equations old and new // Mathematical Biosciences. 2003. Vol. 184, № 2. P. 201–222.

33. *Mirrahimi S., Perthame B., Bowin E., Millien P.* Population formulation of adaptative meso-evolution: Theory and numerics // The mathematics of Darwin's legacy / F.A.C.C. Chalub, J.F. Rodrigues (eds.). Basel: Springer, 2011. P. 159–174.

34. *Ou Ch., Wu J.* Persistence of wavefronts in delayed nonlocal reaction–diffusion equations // Journal of Differential Equations. 2007. Vol. 235, № 1. P. 219–261.

35. *Poloskov I.E., Soize C.* Symbolic and numeric scheme for solution of linear integro-differential equations with random parameter uncertainties and Gaussian stochastic process input // Applied Mathematical Modelling. 2018. Vol. 56, April. P. 15–31.

36. *Rezounenko A.V.* On a class of PDEs with nonlinear distributed in space and time state-dependent delay terms // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2008. Vol. 31, № 13. P. 1569–1585.

37. *Saadatmandia A., Dehghan M.* Numerical solution of the higher-order linear Fredholm integro-differential-difference equation with variable coefficients // Computers and Mathematics with Applications. 2010. Vol. 59, № 8. P. 2996–3004.

38. *Smyshlyaev A., Krstic M.* Closed-form boundary state feedbacks for a class of 1-D partial integro-differential equations // IEEE Transactions on Automatic Control. 2004. Vol. 49, № 12. P. 2185–2202.

39. *Taiwo O.A., Alimi A.T., Akanmu M.A.* Numerical solutions for linear Fredholm integro-differential difference equations with variable coefficients by collocation methods // Journal of Educational Policy and Entrepreneurial Research (JEPER). 2014. Vol. 1, № 2. P. 175–185.

40. *Verdugo A.* Linear analysis of an integro-differential delay equation model // International Journal of Differential Equations. 2018. Vol. 2018, Article ID 5035402. 6 p.

41. *Wang Zh.-Ch., Li W.-T., Ruan Sh.* Entire solutions in bistable reaction-diffusion equations with nonlocal delayed nonlinearity // Transactions of the American Mathematical Society. 2009. Vol. 361, № 4. P. 2047–2084.

42. *Wang Y., Wang Y.* Global dynamics of reaction–diffusion systems with delays // Applied Mathematics Letters. 2005. Vol. 18, № 9. P. 1027–1033.

43. *Yüzbaşı Ş.* Shifted Legendre method with residual error estimation for delay linear Fredholm integro-differential equations // Journal of Taibah University for Science. 2017. Vol. 11, № 2. P. 344–352.

44. *Zou X.* Delay induced traveling wave fronts in reaction diffusion equations of KPP–Fisher type // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2002. Vol. 146, № 2. P. 309–321.